

Կարճ
մաթեմ
մեքենայական
ուսուցման
համար

համառոտ ձեռնարկ

«Որքա՞ն մաթեմ է պետք ML-ով զբաղվելու համար»

Բավականին շատ: Մեքենայական ուսուցումը (Machine Learning-ը) ծավալուն գիտություն է, որով զբաղվելու համար առանցքային նշանակություն ունի իմանալ որոշ չափով մաթեմատիկա և ունենալ քթի ծակ: Այս համառոտ ձեռնարկում հավաքված է ML-ի համար անհրաժեշտ մաթեմի մի մասը՝ գրված շատ համառոտ ու ոչ խորը, նկարագրական ու ազատ ոճով: Ընդամենը այնքան, որքանով հնարավոր է մի փոքր ինֆուլիցիա զարգացնել (ու եթե դուր գա, ապա հեղափոխում կարողանալ ինքնուրույն խորացնել գիտելիքները):

Սա դասագիրք չէ, այլ պարզապես դասընթացի թերյալ: Դասընթացի բուն նյութը սովորելու համար խորհուրդ կտանք հետևյալ դասագրքերը.

- Գծային հանրահաշվից`
 - Poole, *Linear Algebra*
 - Johnston, *Introduction to Linear and Matrix Algebra*
 - Strang, *Introduction to Linear Algebra*
 - Boyd, Vandenberghe, *Introduction to Applied Linear Algebra*
- Մաթեմատիկական անալիզից`
 - Stewart, *Calculus*
 - Hoffmann, Bradley, *Calculus*
 - Cummings, *Real Analysis*
 - Banner, *The Calculus Lifesaver*
 - Պողոսյան, *Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ)*
- Նավանականությունների տեսությունից`
 - Ross, *A First Course in Probability*
 - Grimmett, Welsh, *Probability*
 - Blitzstein, Hwang, *Introduction to Probability*

Յուրաքանչյուր թեմա կարդալիս խորհուրդ կտանք պարփառիչ անել երկու բան`

1. ամեն հարցի հասնելիս դադար փալ ու մտածել հարցի շուրջ 🤔
2. թեման վերջացնելուց հետո կարդալ թեմայի շուրջ դասագրքի էջերն ու դիտել տեսանյութերը

Խնդիրները լուծելիս, հարցերին պատասխանելիս կամ դասագրքում անձանոթ տերմիններ հանդիպելիս դժվարանալը կամ սխալվելը շատ նորմալ է, ընդհանրապես պետք չէ հուսահատվել:

Շնորհակալ կլինենք, եթե վրիպակներ գտնելու դեպքում գրեք [այս հասցեով](#): Ներագայում մաթեմատիկական գիտելիքները խորացնելու համար խորհուրդ կտանք հետևյալ գրքերը`

- Axler, *Linear Algebra Done Right*
- Artin, *Algebra*
- Մուսոյան, *Մաթեմատիկական անալիզ (մաս 1-2)*
- Zorich, *Mathematical Analysis* (vol. 1-2)
- Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*
(նաև հայերեն՝ Ռուդին, *Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները*)
- Durrett, *Probability: Theory and Examples*

որոնք կարող եք գտնել mathteam.notion.site կայքում:

Բովանդակություն

Ձեռնարկի մասին	iii
Բովանդակություն	v
1 Վեկորներ	1
1.1 Ներածություն	1
1.2 Գործողություններ վեկորների հետ	2
1.3 Վեկորների շրջումը	5
1.4 Սկալյար արտադրյալ	6
1.5 Վեկորների պարկերումը երկրաչափորեն	7
1.6 Նորմ	10
1.7 Անկյուն	11
1.8 Խնդիրներ	13
2 Գծային ձևափոխություններ	15
2.1 Գծային փարածություններ	15
2.2 Ենթափարածություններ	16
2.3 Մաքրիցներ	17
2.4 Գործողություններ մաքրիցների հետ	18
2.5 Մաքրիցի և վեկորի բազմապատկումը	20
2.6 Մաքրիցների բազմապատկումը	22
2.7 Խնդիրներ	24
3 Երկրաչափական մեկնաբանություն	27
3.1 Գծային ձևափոխությունները երկրաչափորեն	27
3.2 Ձևափոխությունների արտադրյալ	28
3.3 Միավոր մաքրից	29
3.4 Նակադարձ	31
3.5 Որոշիչ	32
3.6 Նակադարձելիություն	34
3.7 Նեքթ	35
3.8 Խնդիրներ	37
4 Գծային փարածությունների կառուցվածքը	39
4.1 Գծային թաղանթ	39
4.2 Գծորեն անկախություն	42
4.3 Նենթ	43
4.4 Նենթի փոփոխություն	45
4.5 Սեփական արժեք և վեկոր	46
4.6 Խնդիրներ	50
5 Մեկ փոփոխականի ֆունկցիա	53
5.1 Էքստրեմումի խնդիր	53
5.2 Նաջորդականություններ	53
5.3 Նաջորդականության սահման	55
5.4 Փունկցիայի սահման	57
5.5 Ածանցյալ	60

5.6	Ածանցյալի նշանը	64
5.7	Էքսպրեսմոմի խնդրի լուծումը	66
5.8	Խնդիրներ	70
6	Մոդարկում և ինտեգրում	73
6.1	Թեյլորի բազմանդամ	73
6.2	Անորոշ ինտեգրալ	75
6.3	Որոշյալ ինտեգրալ	78
6.4	Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը	80
6.5	Ուռուցիկություն	82
6.6	Խնդիրներ	85
7	Շաքր փոփոխականի ֆունկցիա	87
7.1	$f(x, y)$ -ի գրաֆիկը	87
7.2	Մասնակի ածանցյալ	88
7.3	Շղթայի կանոն	90
7.4	Ուղղությամբ ածանցյալ	92
7.5	Գրադիենտը երկրաչափորեն	93
7.6	Էքսպրեսմոմի խնդիրը բազմաչափ դեպքում	95
7.7	Խնդիրներ	97
8	Հավանականություն	99
8.1	Պարահական փորձ	99
8.2	Պարահայտներ	101
8.3	Հավանականային չափ	104
8.4	Հարկություններ	107
8.5	Պայմանական հավանականություն	108
8.6	Բայեսի բանաձև	110
8.7	Անկախություն	112
8.8	Երկրաչափական հավանականություն	114
8.9	Խնդիրներ	117
9	Պարահական մեծություններ	121
9.1	Ֆորմալ սահմանումը	121
9.2	Դիսկրետ պարահական մեծություններ	123
9.3	Բաշխման ֆունկցիա	125
9.4	Անընդհատ պարահական մեծություններ	129
9.5	Հավասարաչափ բաշխում	131
9.6	Անկախություն	133
9.7	Խնդիրներ	134
10	Վիճակագրական բնութագրիչներ	137
10.1	Մաթսպասում	137
10.2	Վարիացիա	140
10.3	Կովարիացիա	144
10.4	Կոռելացիա	148
10.5	Բաշխումներ	149
10.6	Խնդիրներ	154

1.1 Ներածություն

Պարկերացրեք՝ ունեք 2 հար 10 դրամանոց, 1 հար 20 դրամանոց, 2 հար 50 դրամանոց և 1 հար 200 դրամանոց: Ինչպե՞ն կարող ենք գրի առնել այդ փաստը:

Մի փարբերակ է՝ վերցնել ու աղյուսակով իրար փակ գրել յուրաքանչյուր մեքաղադրամի արժեքը և մեր ունեցած քանակը.

արժեք	քանակ
10	2
20	1
50	2
100	0
200	1

կամ, պարզապես, վերցնել այդ աղյուսակի երկու սյուները՝

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Վերևում գրված մի քանի թվերից բաղկացած օբյեկտներն անվանում ենք *վեկորներ*:

Սահմանում 1.1 *Իրական թվերի կարգավորված n -յակը կոչվում է վեկոր (կամ սյուն վեկոր)*

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

իսկ $v_1, v_2, \dots, v_n$ թվերը կոչվում են վեկորի **բաղադրիչներ**:

Եթե նույն վեկորը գրենք շրջած տեսքով՝ հորիզոնական, ապա կստանանք (ինչպես գուշակեցիք) *դող վեկոր*՝

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]:$$

n -չափանի բոլոր վեկորների բազմությունը նշանակում ենք $\mathbb{R}^n$ -ով: Եթե նկատի ունենք, որ $\mathbf{v}$ -ն $\mathbb{R}^n$ -ից (այսինքն՝ n -չափանի) վեկոր է, ապա գրում ենք՝ $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

Մասնավորապես, $\mathbb{R}^1$ -ի վեկորները հենց թվերն են՝ $[v] \in \mathbb{R}$:

1.1 Ներածություն	1
1.2 Գործողություններ վեկորների հետ	2
1.3 Վեկորների շրջումը	5
1.4 Սկալյար արտադրյալ	6
1.5 Վեկորների պարկերումը երկրաչափորեն	7
1.6 Նորմ	10
1.7 Անկյուն	11
1.8 Խնդիրներ	13

կարգավորված n -յակ = ֆիքսված հերթականությամբ իրար կողք գրված n հար թիվ

Օրինակ 1.1 Սրանք բոլորը համապատասխան չափանի վեկորներ են՝

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\mathbf{v}_4$ -ը կոչվում է $\mathbb{R}^3$ փարածության *զրոյական վեկոր* և նշանակվում թավ 0-ով՝ $\mathbf{0}$:

1.2 Գործողություններ վեկորների հետ

Նշանակենք

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Այսպիսով՝ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$:

Պարկերացրեք՝ ինչ-որ մեկը մեզ փվեց, ասենք, 3×100 դրամ և 1×200 դրամ: Նշանակենք

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Այդ դեպքում կունենանք հետևյալ մեքադադրամները՝

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 1+0 \\ 2+0 \\ 0+3 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ավելի ընդհանուր,

Սահմանում 1.2 Երկու n -չափանի $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ և $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ **վեկտորներ**

ների գումար կանխանենք

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{bmatrix}$$

վեկտորը, այսինքն՝ գումարում ենք համապատասխան բաղադրիչները:



Զգուշացե՛ք. Տարբեր չափանի վեկտորներ իրար գումարել չենք կարող:

Իսկ ի՞նչ, եթե ինչ-որ հրաշքով մեքադադրամները կրկնապարկվեին: Յուրաքանչյուր մեքադադրամից կունենայինք՝

$$2 \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

հաբ: Ուրեմն սահմանենք՝

Սահմանում 1.3 Ցանկացած $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ վեկտորի և $c \in \mathbb{R}$ թվի

համար $\mathbf{v}$ **վեկտորի բազմապատկում** c **թվով** կանխանենք

$$c \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{bmatrix}$$

վեկտորը, այսինքն՝ $\mathbf{v}$ -ի բոլոր բաղադրիչները բազմապատկում ենք c -ով:

թիվ բառի փոխարեն կօգտագործենք նաև *սկալյար (scalar)* բառը

Ինչպես թվերի գումարում-բազմապատկումը, այնպես էլ վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները օժտված են հետևյալ լավ հատկություններով՝

- գույքողականություն, այսինքն՝

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \text{և} \quad (c \cdot d) \cdot \mathbf{v} = c \cdot (d \cdot \mathbf{v})$$

- օ փեղափոխականություն, այսինքն՝

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \text{և} \quad c \cdot (d \cdot \mathbf{v}) = d \cdot (c \cdot \mathbf{v}) = (cd) \cdot \mathbf{v}$$

- օ բաշխականություն, այսինքն՝

$$c \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{v} + c \cdot \mathbf{u}$$

ցանկացած $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ վեկորների և $c, d \in \mathbb{R}$ թվերի համար:

Վերջապես պարկերացրեք, որ մտնում եք խանութ և ծախսում 2×50 դրամանոց: Ինչպե՞ն կփոխվի Ձեր գրպանի պարունակությունը:

Սահմանում 1.4 Ցանկացած $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ վեկորի **հակադիր**

կանվանենք

$$-\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix}$$

վեկորը, այսինքն՝ $\mathbf{v}$ բոլոր բաղադրիչները բազմապատկում ենք -1 -ով:

Իսկ հակադիրի միջոցով սահմանենք վեկորների հանումը՝

Սահմանում 1.5 Երկու n -չափանի $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ և $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ **վեկորների տարբերություն** կանվանենք $\mathbf{u}$ -ի և $-\mathbf{v}$ -ի գումարը՝

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{bmatrix}$$

այսինքն՝ հանում ենք համապատասխան բաղադրիչները:



Զգուշացե՛ք. Տարբեր չափանի վեկորներ իրարից հանել չենք կարող:

Օրինակ 1.2

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-4 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.3 Վեկտորների շրջումը

Երբեմն ունենում ենք, ենթադրենք, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ վեկտորը և ցանկանում ենք ինչ-որ ձևով նշանակել $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ վեկտորը, այսինքն՝ որպես սյուն գրված վեկտորը գրել որպես տող: Այդ դեպքում կգրենք պարզապես, որ

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Սահմանում 1.6 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ սյուն **վեկտորի տրանսպոնացված (կամ շրջած)** ենք անվանում

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

տող վեկտորը, այսինքն՝ նույն $\mathbf{v}$ -ն, բայց շրջած:

Նույն ձևով սահմանում ենք տող վեկտորի տրանսպոնացվածը՝ որպես համապատասխան սյուն վեկտոր:

Օրինակ 1.3

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Նկատենք, որ ցանկացած c թվի և $\mathbf{v}$ վեկտորի համար

$$(c \cdot \mathbf{v})^T = c \cdot \mathbf{v}^T$$



Նաթղ. Ի՞նչ էք կարծում, ինչի՞ է հավասար $(\mathbf{v}^T)^T$ -ն:

Ինչպես տեսնում եք, տող և սյուն վեկտորների միջև էական տարբերություն չկա. գրելաձևը տարբեր է, բայց բովանդակությունը՝ թվերը նույնն են: Այնպես որ այսուհետք վեկտորների մասին խոսելիս չենք նշի «տող վեկտոր» կամ «սյուն վեկտոր», այլ պարզապես կասենք «վեկտոր»:



Զգուշացե՛ք. Տող վեկտորին սյուն վեկտոր գումարել չի կարելի:

1.4 Սկալյար արտադրյալ

Վերադառնանք մեր մեքադադրամներին: Ունենինք $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$ արժողու-
թյամբ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ քանակով մեքադադրամներ:



Նաթց. Որքա՞ն գումար ունենք ընդհանուր:

Սահմանում 1.7 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ և $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ վեկորների **սկալյար արտադրյալ** կանվանենք

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

թիվը:

Օրինակ 1.4 Եթե $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ և $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, ապա

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 4) + (3 \cdot 0) = 2 - 4 + 0 = -2$$

Մեր ունեցած գումարը պարզելու համար կարող ենք հաշվել արժողու-
թյունների ու քանակների $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկորների սկալյար արտադրյալը՝

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 200 = 340$$

Նկատենք, որ եթե երկու վեկորների գումարը կամ փարբերությունը
վեկոր է, ապա դրանց սկալյար արտադրյալը *թիվ է* (ինչի համար էլ
կոչվում է *սկալյար* արտադրյալ): Իսկ քանի որ սկալյար արտադրյալը
նշանակում են կերիկով՝ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, անգլերենում այն կոչվում է նաև *dot product*:



Զգուշացե՛ք. Սկալյար արտադրյալը սահմանված է միայն նույն
չափանի վեկորների համար:

Ինչպես գումարման և թվով բազմապատկման դեպքում, սկալյար արտադրյալը ևս օժտված է օգտակար հատկություններով.

- տեղափոխականություն՝

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

- զուգորդականություն՝

$$(c \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c \cdot \mathbf{v})$$

- բաշխականություն՝

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

- դրական որոշյալություն՝

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0,$$

ընդ որում զրոյի հավասարվելու միակ դեպքն այն է, երբ $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:



Նաթգ. Ինչո՞ւ է չորրորդ հատկությունը ճիշտ ցանկացած վեկտորի համար:

Օրինակ 1.5 Նաշվենք $(5\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ արտահայտության արժեքը

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

վեկտորների համար:

$$\begin{aligned} (5\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \left(5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-2) + (-14) \cdot 1 + 16 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

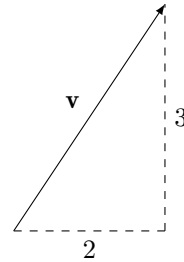
1.5 Վեկտորների պատկերումը երկրաչափորեն

Մինչ այս պահը վեկտորները մեր համար զույր ինչ-որ թվացուցակներ են: Պարզվում է, որ իրականում վեկտորներն ունեն շատ գեղեցիկ երկրաչափական մեկնաբանություն:

Վերցնենք օրինակ՝

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

երկչափ վեկտորը: Այն կարող ենք պատկերել հետևյալ ձևով. վերջնենք կոորդինատական հարթության $(0, 0)$ սկզբնակետը և սլաքով միացնենք $(2, 3)$ կոորդինատներով կետին:



Արդյունքում կստանանք սլաք (կամ ուղղորդված հարված), որը հենց կլինի $\mathbf{v}$ վեկտորի երկրաչափական պատկերը: Այս եղանակով կարող ենք $\mathbb{R}^2$ տարածության բոլոր վեկտորների մասին մտածել որպես $(0, 0)$ կետից սկսվող որոշակի ուղղություն և երկարություն ունեցող *սլաքների*²:

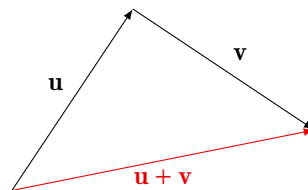
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto (0, 0)\text{-ից սկսվող սլաք դեպի } (x, y)$$

² 2-3 բաժակ հեփո հնարավոր է պատկերել նաև $\mathbb{R}^4$ -ի վեկտորները

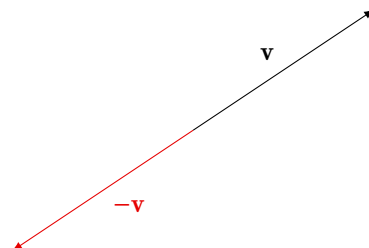
Նման ձևով $\mathbb{R}^3$ -ի վեկտորները նույնպես կարող ենք պատկերել որպես եռաչափ (3D) տարածության մեջ սլաքներ: Ինչպես ընթացքում կդիտարկենք, վեկտորներին առնչվող բազմաթիվ գաղափարներ բավարար է հասկանալ ընդամենը 2-չափ ու 3-չափ դեպքերում, որպեսզի պատկերացնենք, թե ինչ է տեղի ունենում ավելի մեծ չափանի տարածություններում:

Վեկտորները երկրաչափորեն պատկերելը օգտակար է հարկապես նրանով, որ այսպես ավելի հեշտ է պատկերացնել դրանց հետ կապարվող գործողությունները.

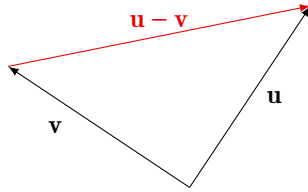
Գումարում. Երկու $\mathbf{u}$ և $\mathbf{v}$ վեկտորներ գումարելու համար $\mathbf{v}$ վեկտորի սկզբնակետը տեղադրում ենք $\mathbf{u}$ վեկտորի վերջնակետից: Արդյունքում $\mathbf{u}$ -ի սկզբնակետից դեպի $\mathbf{v}$ -ի վերջնակետը ուղղված վեկտորը կլինի $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ -ն:



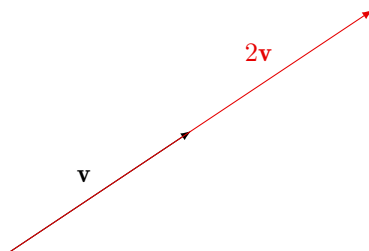
Նակադիր. $\mathbf{v}$ վեկտորի $-\mathbf{v}$ հակադիրը այն վեկտորն է, որն ունի նույն երկարությունը և ուղղված է $\mathbf{v}$ -ին հակառակ:



Հանում. u վեկորից v վեկորը հանելու համար կարող ենք u -ին գումարել v -ի հակադիրը, կամ ուրիշ կերպով՝ u -ն ու v -ն պատկերել միևնույն սկզբնակետից, ծայրակետերը միացնել իրար՝ ստանալով եռանկյուն, և վերցնել v -ի վերջնակետից դեպի u -ի վերջնակետն ուղղված վեկորը:



Թվով բազմապատկում. v վեկորը c դրական թվով բազմապատկելիս այն ձգվում/սեղմվում է c անգամ, այսինքն՝ ստացվում է նույն ուղղությամբ, բայց փարբեր երկարությամբ վեկոր:



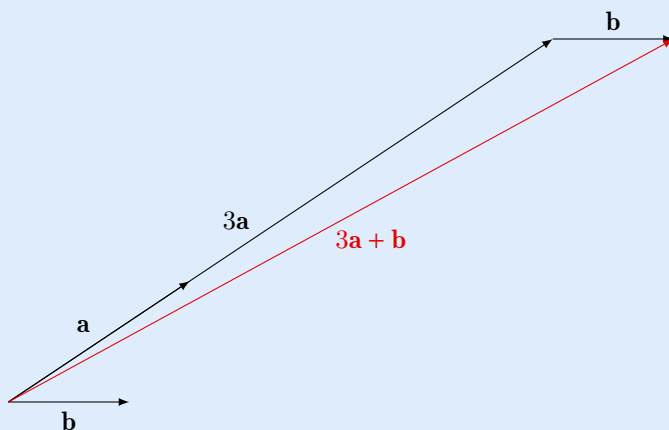
Բացասական c -ով բազմապատկելիս երկարությունը կրկին բազմապատկվում է $|c|$ անգամ, բայց վեկորը շրջվում է հակառակ ուղղությամբ:



Հարց. Ի՞նչ է դառնում վեկորը, երբ այն բազմապատկում ենք 0-ով:

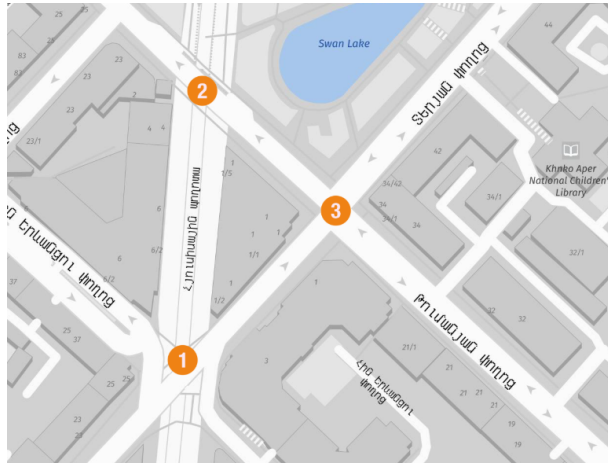
Օրինակ 1.6 Եթե $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ և $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, ապա $3a + b$ -ն գտնելու համար պետք է

1. a -ն ձգել 3 անգամ,
2. b -ն փեղադրել ստացված $3a$ վեկորի վերջնակետից,
3. (լրացրու ինքդ)



1.6 Նորմ

Վեկորների երկրաչափական պարկերումից հարց է առաջանում. եթե վեկորը սլաք է, ապա ինչի՞ է հավասար նրա երկարությունը: Դե, հափվածի երկարությունը նրա սկզբնակետի և վերջնակետի միջև եղած հեռավորությունն է: Իսկ ինչպե՞ս հաշվենք այդ հեռավորությունը, օրինակ, $[3 \ 4]$ վեկորի դեպքում՝ օգտվելով դրա կոորդինատներից (3 և 4 թվերից):



Որքա՞ն ճանապարհի պետք է անցնել, օրինակ, Նյուսիսային-Տերյան ① և Նյուսիսային-Թումանյան ② խաչմերուկների միջև:

Նգրիտյունի փոխանկյունից՝ ① և ② կետերի հեռավորությունը հավասար է դրանք միացնող հափվածի երկարությանը:

Վարորդի փոխանկյունից՝ ①-② հափվածի երկարությունը որևէ իմաստ չունի: Փոխարենը հեռավորությունը հաշվելու համար պետք է ①-③ հափվածի երկարությանը գումարել ②-③-ի երկարությունը:

Ուրեմն կախված իրավիճակից՝ հեռավորություն և վեկորի երկարություն գաղափարները կարող ենք փոխարինել: Պայմանավորվենք այսուհետ «երկարություն» բառի փոխարեն ասել վեկորի *նորմ*:

Մահմանում 1.8 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$ վեկորի մանհեթընյան *նորմ* (կամ L_1 *նորմ*) կանվանենք

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

թիվը, այսինքն՝ նրա բաղադրիչների մոդուլների գումարը:

Օրինակ 1.7 $\mathbf{v} = [3 \ 4]$ վեկորի մանհեթընյան նորմը կլինի՝

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |4| = 7$$

Սահմանում 1.9 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$ վեկտորի **Էվկլիդեսյան նորմ** (կամ L_2

նորմ) կանխանենք

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

թիվը, այսինքն՝ նրա բաղադրիչների քառակուսիների գումարի արմարը:

նկատենք, որ $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

Օրինակ 1.8 $\mathbf{v} = [3 \ 4]$ վեկտորի Էվկլիդեսյան նորմը կլինի՝

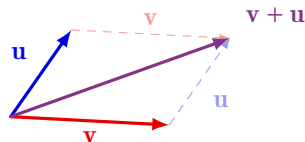
$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Վեկտորի Էվկլիդեսյան նորմը դպրոցական երկրաչափությունից մեզ հայտնի սփանդարտ երկարությունն է: Նաճախ ինդեքսում գրվող փոքրիկ 2-ը բաց ենթ թողում և $\|\mathbf{v}\|_2$ -ի փոխարեն գրում $\|\mathbf{v}\|$:

Կան վեկտորների բազմաթիվ այլ նորմեր (երկարությունը հաշվելու եղանակներ), բայց հետագայի համար մեզ այս երկուսը բավարար են: Նշենք, որ անկախ նրանից, թե ինչպես կսահմանենք վեկտորի նորմը, այն բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին՝

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, ընդ որում գրոյի հավասար է այն և միայն այն դեպքում, եթե $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
2. $\|c\mathbf{v}\| = |c| \cdot \|\mathbf{v}\|$,
3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$:

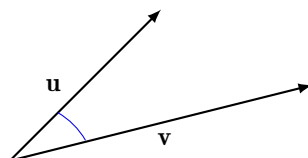
«զծենք -3 երկարությամբ վեկտոր»՝
այնքան էլ չի հնչում



Վերջին հատկությունը կոչվում է *եռանկյան անհասկաստարություն* (ի՞նչ եք կարծում, ինչո՞ւ):

1.7 Անկյուն

Վերջապես, եթե վեկտորը երկրաչափորեն պարզապես ինչ-որ սլաք է, իսկ սլաքը բնութագրվում է երկու մեծությամբ՝ երկարություն և ուղղություն, ապա նորմից բացի պետք է գոյություն ունենա նաև մեկ այլ գործիք/միջոց, որով հնարավոր կլինի նկարագրել ուղղությունները: Այդ գործիքը *անկյուն*ն է:



հիշում եք դպրոցական երկրաչափությունից հայտնի բանաձևը՝

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \alpha,$$

որտեղ α -ն $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ -ի կազմած անկյունն է

Սահմաններ երկու վեկորների կազմած անկյան գաղափարը հետևյալ կերպ.

Սահմանում 1.10 $\mathbf{u}$ և $\mathbf{v}$ **վեկորների կազմած անկյուն** կանվանենք այն θ անկյունը ($0 \leq \theta \leq \pi$), որի համար

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

Օրինակ 1.9 Գտնենք $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ և $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ վեկորների կազմած անկյունը:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{(3 \cdot 7) + (4 \cdot 1)}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{25}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$

Փաստորեն, վեկորների կազմած անկյունը սահմանեցինք այնպես, որ

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \cos \theta :$$



Նաթ. Երկրաչափորեն ի՞նչ է ցույց տալիս վեկորների սկալյար արտադրյալը:

Վեկորների կազմած անկյանը նայելով՝ կարելի է եզրակացնել, թե որքանով են վեկորները իրար նման կամ իրարից փարբեր: Իրոք, եթե երկու վեկորներ ուղղված են իրար մոտ ուղղություններով, ապա նրանց կազմած անկյունը փոքր է: Եթե դրանք ուղղված են միմյանց գրեթե հակառակ, ապա կազմած անկյունը մոտ է 180° -ի: Մասնավորապես՝ ցանկացած $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ վեկոր ինքն իր հետ կազմում է 0° անկյուն, իր հակադիրի հետ՝ 180° անկյուն:

Իսկ եթե վեկորներն ուղղված են ոչ նույն, ոչ էլ հակառակ, այլ իրար հետ կապ չունեցող ուղղություններով (ասենք՝ մեկը վերև, մյուսը՝ աջ), ապա դրանց կազմած անկյունը կլինի $\theta \approx 90^\circ = \frac{\pi}{2}$: Ներկաքար $\cos \theta = 0$, ուրեմն $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$: Այսպիսով սրացանք, որ եթե երկու վեկորներ ուղղահայաց են, ապա նրանց **սկալյար արտադրյալը զրո է**:

Սա այս գլխի ամենակարևոր արդյունքներից է. եթե $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \approx 0$, ապա $\mathbf{u}$ և $\mathbf{v}$ վեկորներն ուղղված են միմյանց (մոտավորապես) ուղղահայաց, այսինքն՝ իրար հետ կապ չունեցող ուղղություններով:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Poole], 2-12 էջերը (վեկորներ)
- կարդալ [Johnston], 10-14 (նորմ), 16-19 (անկյուն) էջերը
- դիտել 3b1b-ի [1-ին տեսադասը](#) գծային հանրահաշվից (նաև՝ [հայերեն](#))

1.8 Խնդիրներ

Խնդիր 1.1 Տրված են հետևյալ վեկտորները՝

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6.5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Գտեք արտահայտության արժեքը.

- ա. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- բ. $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$
- գ. $\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T - \mathbf{c}^T$
- դ. $3\mathbf{a}^T + 4\mathbf{b}^T - 2\mathbf{c}^T$
- ե. $6\mathbf{a}^T + 8\mathbf{b}^T - 4\mathbf{c}^T$
- զ. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- է. $(3\mathbf{a} - 6\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
- ը. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T)^T$

Խնդիր 1.2 Թարգմանչական գրասենյակը թարգմանեց

$$\mathbf{a} = [24 \quad 17 \quad 9 \quad 13]$$

փաստաթուղթ համապատասխանաբար անգլերեն, ֆրանսերեն, գերմաներեն և ռուսերեն: Յուրաքանչյուր լեզվի համար մեկ էջ թարգմանելը փնտմ է մոտավորապես $\mathbf{b} = [5 \quad 10 \quad 11 \quad 7]$ թույլ:

Ընդհանուր որքա՞ն ժամանակ պահանջվեց փաստաթղթերը թարգմանելու համար: Միջինում քանի՞ թույլ ծախսեց թարգմանիչներից յուրաքանչյուրը, եթե գրասենյակում կա 4 թարգմանիչ: Պատասխանը արտահայտեք $\mathbf{a}$ -ով և $\mathbf{b}$ -ով:

Խնդիր 1.3 Նաշվեք հետևյալ վեկտորների մանհեղձնյան և էվկլիդյան նորմերը.

ա. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$

բ. $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, որտեղ $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

գ. $-3\mathbf{c}$, որտեղ $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Խնդիր 1.4 Որքա՞ն անկյուն են կազմում

ա. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ և $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ վեկտորները

բ. նախորդ խնդրի $\mathbf{a}$ ու $\mathbf{c}$ վեկտորները

Խնդիր 1.5 Ամենաշատը քանի՞ վեկտոր կարող ենք տեղադրել $\mathbb{R}^2$ հարթության մեջ, որպեսզի ցանկացած երկուսի սկալյար արտադրյալը լինի դրական: Իսկ որպեսզի լինի բացասական:

2.1 Գծային փարածություններ

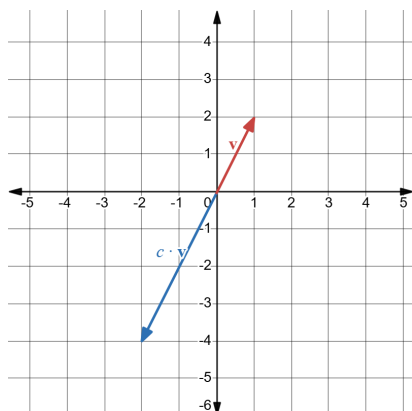
Դիտարկենք հետևյալ երեք բազմությունները.

- թվանշանների $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ բազմությունը
- դրական թվերի $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ բազմությունը
- երկչափ վեկտորների $\mathbb{R}^2$ բազմությունը

Եթե փորձենք վերցնել յուրաքանչյուր բազմությունից երկու փարր և գումարել իրար, ապա ցանկացած երկու դրական թիվ գումարելով՝ կստանանք դրական թիվ, ցանկացած երկու երկչափ վեկտոր գումարելով՝ կստանանք նորից երկչափ վեկտոր, իսկ այ երկու թվանշան գումարելիս հնարավոր է, որ թվանշան չստացվի (օրինակ՝ $5 + 7 = 12$, որը D -ից չէ): Այս դեպքում ասում են, որ P և $\mathbb{R}^2$ բազմությունները *փակ են գումարման նկատմամբ*:

Նման ձևով, եթե յուրաքանչյուր բազմությունից վերցնենք որևէ փարր ու բազմապատկենք ինչ-որ $c \in \mathbb{R}$ թվով/սկալյարով, ապա հնարավոր է, որ D -ի դեպքում ստացվածը չլինի թվանշան (օրինակ՝ $5 \cdot c$, որտեղ $c = 1000$), իսկ P -ի դեպքում չլինի դրական թիվ (օրինակ՝ $12 \cdot c$, որտեղ $c = -1$): Մյուս կողմից՝ $\mathbb{R}^2$ -ից ինչ վեկտոր էլ վերցնենք և ինչ c թվով էլ բազմապատկենք, $\mathbb{R}^2$ բազմությունից դուրս չենք կարող հայտնվել. միշտ ստանալու ենք ինչ-որ երկչափ վեկտոր $\mathbb{R}^2$ -ից: Ինչպես կռահում եք, $\mathbb{R}^2$ -ը կոչվում է *փակ թվով բազմապատկման նկատմամբ* (իսկ D -ն ու P -ն փակ չեն):

Գումարման և թվով բազմապատկման նկատմամբ փակ լինելը շար օգտակար հատկություն է, քանի որ այդ դեպքում առանց բազմությունից դուրս գալու կարելի է բազմության փարրերը ազատորեն գումարել-հանել կամ բազմապատկել թվերով, ու արդյունքում մնալ միևնույն բազմության մեջ:



Պարզվում է՝ միայն $\mathbb{R}^2$ -ը չէ, որ օժտված է այդ լավ հատկություններով: Վերցնենք, օրինակ, $y = 2x$ ուղիղը և դրա վրա ընտրենք ցանկացած $\mathbf{v}$ վեկտոր: Ինչպիսի $c \in \mathbb{R}$ թվով էլ այն բազմապատկենք, արդյունքում ստացված վեկտորը նորից ընկած է լինելու $y = 2x$ ուղղի վրա: Նույն

2.1 Գծային փարածություններ	15
2.2 Ենթափարածություններ . .	16
2.3 Մաթրիցներ	17
2.4 Գործողություններ մաթրիցների հետ	18
2.5 Մաթրիցի և վեկտորի բազմապատկումը	20
2.6 Մաթրիցների բազմապատկումը	22
2.7 Խնդիրներ	24

կերպ, ինչ երկու $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ վեկտորներ էլ վերցնենք այս ուղղի վրա և գումարենք իրար, ստացվածը կրկին $y = 2x$ -ի վրա է լինելու:

Այլ կերպ ասած՝ ինչպես $\mathbb{R}^2$ -ը, այնպես էլ $y = 2x$ ուղիղը (գիծը) **փակ է գումարման և թվով բազմապատկման նկատմամբ**:



Նաթգ. Իսկ ի՞նչ կարող էք ասել $y = 2x + 1$ ուղղի մասին:

Նմանափաօգրակար բազմությունները, որոնց փարրերը կարելի է ազարորեն

- գումարել-հանել
- գումարելիների փեղերը փոխել
- գումարման ու թվով բազմապատկման հերթականությունը փոխել
- փակագծերը բացել

$\mathbb{R}^2$ -ը գծային փարածություն է, իսկ $y = 2x$ ուղիղը նրա ենթափարածություն է

և այլն՝ առանց այդ բազմությունից դուրս հայտնվելու, կանվանենք **գծային փարածություններ**:

Սահմանում 2.1 V բազմությունը կոչվում է **գծային** (կամ վեկտոր-րական) **փարածություն**, եթե այն

ցանկացած իրական թվով

1. փակ է գումարման և թվով բազմապատկման նկատմամբ և նրա փարրերը բավարարում են հերկյալ հարկություններին.

այսինքն՝ ամեն $\mathbf{v}$ -ի հակադիր ևս V -ից է

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
4. կա մի այնպիսի $\mathbf{0}$ փարր, որ $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ ցանկացած $\mathbf{v} \in V$ համար
5. ցանկացած $\mathbf{v} \in V$ փարրի համար կա այնպիսի $\bar{\mathbf{v}}$ փարր, որ $\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$
6. $(cd) \cdot \mathbf{v} = c \cdot (d \cdot \mathbf{v})$
7. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
8. $c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}$
9. $(c + d) \cdot \mathbf{v} = c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{v}$

Տարկությունները անգիր անելու կարիք չկա. դրանք այն բնական հարկություններն են, առանց որոնց կոժվարանայինք աշխարել վեկտորների հեր:

2.2 Ենթափարածություններ

Այսպիսով, $\mathbb{R}^2$ -ը ($\mathbb{R}^1$ -ը, $\mathbb{R}^3$ -ը, ...) գծային փարածություն է: Բայց նրանում ընկած $y = 2x$ ուղիղը նույնպես բավարարում է 1-9 պայմաններին, հերկաբար այն նույնպես գծային փարածություն է:

Սահմանում 2.2 V գծային փարածության U ենթաբազմությունը կոչվում է V -ի **ենթափարածություն**, եթե այն իներ գծային փարածություն է:

Օրինակ 2.1 Գծային տարածություններ են օրինակ՝

- բոլոր $\mathbb{R}^n$ -երը,
- իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունը,
- $\mathbb{R}^2$ հարթության $(0, 0)$ սկզբնակետով անցնող ցանկացած ուղիղ (հետևաբար դրանք $\mathbb{R}^2$ -ի ենթատարածություններ են),
- $\mathbb{R}^3$ տարածության $(0, 0, 0)$ սկզբնակետով անցնող ցանկացած ուղիղ և ցանկացած հարթություն (հետևաբար դրանք $\mathbb{R}^3$ -ի ենթատարածություններ են),
- միայն 0 -ից բաղկացած $\{0\}$ բազմությունը,

բայց միևնույն ժամանակ՝

- բնական թվերի բազմությունը,
- դրական թվերի բազմությունը,
- $\mathbb{R}^2$ -ի y -ների առանցքից վերև ընկած վեկտորների բազմությունը

գծային տարածություններ չեն:

Իրականում, եթե ունենք ինչ-որ V գծային տարածություն և դրա մի որևէ U ենթաբազմություն, ապա դժվար չէ պարզել՝ U -ն իրենով գծային (ենթա)տարածություն է, թե ոչ: Պարզվում է, որ եթե U -ն փակ է գումարման և թվով բազմապատկման նկատմամբ, ապա դա *բավարար* է, որ այն լինի V -ի ենթատարածություն:

որպես օրինակ՝ պարկերացրեք $V = \mathbb{R}^2$, իսկ U -ն $y = 2x$ ուղիղն է $\mathbb{R}^2$ -ում

Թեորեմ 2.1 Եթե V -ն գծային տարածություն է, իսկ U -ն նրա որևէ ենթաբազմություն, ապա U -ն կլինի V -ի ենթատարածություն այն և միայն այն դեպքում, եթե

1. $x + y \in U$ ցանկացած $x, y \in U$ համար,
2. $cx \in U$ ցանկացած $x \in U$ և $c \in \mathbb{R}$ համար:

Այսինքն՝ եթե U -ն փակ է գումարման ու թվով բազմապատկման նկատմամբ, ապա մնացած 2-9 օգտակար հարկությունները այն արդեն ժառանգում է V -ից (հետևաբար դառնում գծային տարածություն):



Զգուշացրեք. Թեորեմը աշխատում է, միայն եթե V -ն գծային տարածություն է:

2.3 Մաթրիցներ

Այժմ պարբերաբար ենք $\mathbb{R}^n$ տարածությունը պարել, շրջել, ռեզինի նման ձգել ու սեղմել, բայց դրա համար նախ հարկավոր է ներմուծել մի գործիք:

Ի՞նչ կլինի, եթե իրար կողք շարենք մի քանի սյուն վեկտորներ (կամ իրար տակ՝ մի քանի տող վեկտորներ). կստացվի այդ վեկտորներից կազմված աղյուսակ: m տող և n սյուն ունեցող թվերի աղյուսակը կանվանենք $m \times n$ չափանի **մատրից**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} :$$



Մատրիցները որպես կանոն կնշանակենք լատինական մեծատառերով, իսկ դրանց փարբերը՝ փոքրատառ + ինդեքսում սյան և սյան համարով (օրինակ՝ 4-րդ սյան 6-րդ թվի դեպքում a_{46}):

Ինչպես վեկտորների դեպքում, բոլոր $m \times n$ չափանի մատրիցների բազմությունը կնշանակենք $\mathbb{R}^{m \times n}$ -ով:



Զգուշացե՛ք. Առաջինը միշտ նշում ենք տողը, հետո՝ սյունը:

Օրինակ 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$



Նաթ. Որո՞նք են $m \times 1$ չափանի մատրիցները:

2.4 Գործողություններ մատրիցների հետ

Մատրիցները կգումարենք, հանենք, թվով բազմապատկենք ճիշտ այնպես, ինչպես վեկտորները, այսինքն՝ փարբ առ փարբ:

Գումարում. Նույն չափանի երկու մատրիցներ գումարելիս համապատասխան փեղում գրված փարբերը գումարվում են իրար՝

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Թվով բազմապատկում. Մատրիցը $c \in \mathbb{R}$ թվով (սկալյարով) բազմապատկելիս դրա բոլոր փարբերը բազմապատկում ենք c -ով՝

$$c \cdot A = c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \dots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Նակադիր. Մատրիցի հակադիրը նույն մատրիցն է՝ բազմապատկված -1 -ով, այսինքն՝ բոլոր թվերը փոխարինվում իրենց հակադիրներով.

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

Նախադրում. Նույն չափանի մի մատրիցից մյուսը հանելիս առաջինի պարրերից հանում ենք երկրորդի համապատասխան տեղում գրված արարերը՝

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ինչպես տեսնում ենք, գործողությունների արամաբանությունը նույնն է, ինչ վեկտորների դեպքում: Այսպես նույնպես



Զգուշացե՛ք. Տարբեր չափ ունեցող մատրիցներ գումարել և հանել չենք կարող:

Ինչպես կարելի է կռահել, ամբողջությամբ զրոներից բաղկացած մատրիցը կոչվում է *զրոյական մատրից* և նշանակվում O կամ $O_{m \times n}$:

m -ն ու n -ը մատրիցի չափերն են

Օրինակ 2.3

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Նախադրում. Ի՞նչ կարացվի, եթե որևէ մատրիցի ձախից գումարենք O : Իսկ աջից:

Մինչ այս պահը բոլոր գործողությունները սահմանել ենք շատ բնական ձևով, ինչպես վեկտորների դեպքում: Ուստի զարմանալի չէ, որ ցանկացած ֆիքսած m , n -ի համար

Թեորեմ 2.2 $\mathbb{R}^{m \times n}$ բազմությունը գծային տարածություն է:

Այսինքն՝ ֆիքսված չափի մատրիցների բազմությունը և նրա վրա մեր սահմանած գումարումն ու թվով բազմապատկումը բավարարում են 1-9 օգտակար հատկություններին: Այլ կերպ ասած՝ մատրիցների հետ գործողություններ անելիս կարելի է հանգիստ փակագծերը բացել, գումարելիների տեղերը փոխել, և այլն:



Նախադրում. Կարո՞ղ եք ապացուցել թեորեմը:

Վերջապես սահմանենք նաև մատրիցի շրջումը:

Սահմանում 2.3 A մատրիցի *տրանսպոնազված* (կամ *շրջած*) ենք անվանում նույն մատրիցը՝ տողերի փոխարեն գրած A -ի

սյունները/սյունների փոխարեն գրած A -ի տողերը.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Օրինակ 2.4

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

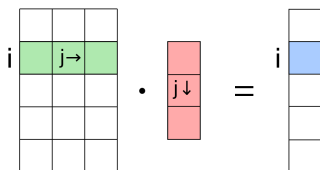
Նկատենք, որ եթե $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ապա $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

2.5 Մատրիցի և վեկտորի բազմապատկումը

Այժմ ունենք երկու փեսակի օբյեկտ՝ վեկտորներ և մատրիցներ, որոնք մինչ այս ապրել են իրենց առանձին աշխարհներում: Ժամանակն է սահմանել մի բան, որը իրար կկապի մատրիցներն ու վեկտորը:

Սահմանում 2.4 Ենթադրենք A -ն $m \times n$ մատրից է, իսկ $\mathbf{v}$ -ն՝ n -չափանի վեկտոր: A մատրիցը և $\mathbf{v}$ վեկտորը բազմապատկելու համար A -ի յուրաքանչյուր տողում գրված թվերը հերթով բազմապատկում ենք $\mathbf{v}$ -ի համապատասխան տարրերի հետ և ստացված արտադրյալները գումարում:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$



$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

Արդյունքում ստացված m -չափանի վեկտորը կոչվում է A մատրիցի և $\mathbf{v}$ վեկտորի արտադրյալ:

Այլ կերպ ասած՝ եթե A -ի տողերը նշանակենք $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$,

$\mathbf{A}_i$ -երը կլինեն n -չափանի վեկտորներ

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{A}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{A}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{A}_m & \dots \end{bmatrix}$$

ապա

- $A\mathbf{v}$ -ի առաջին բաղադրիչը կլինի $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v}$ սկալյար արտադրյալը,
- $A\mathbf{v}$ -ի երկրորդ բաղադրիչը կլինի $\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v}$ սկալյար արտադրյալը,

և այդպես շարունակ՝

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Օրինակ 2.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Ինչ-որ իմաստով՝ մատրիցի ու վեկտորի բազմապարկումը մեր իմացած սկալյար արտադրյալի ընդհանրացումն է։ Ի սկզբանե գիտեինք, թե ինչպես բազմապարկել վեկտորը վեկտորով։ Իսկ մատրիցը ոչ այլ ինչ է, քան իրար փակ գրված մի քանի վեկտոր։ Ինչպես պիտի բազմապարկենք այդ «մի քանի վեկտորը» մեկ այլ $\mathbf{v}$ վեկտորի հետ. բնական կլիներ հերթով դրանցից յուրաքանչյուրը բազմապարկել $\mathbf{v}$ -ով, ապա սրացվածները գրել իրար փակ (ինչը և արեցինք)։

Օրինակ 2.6

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Այնուամենայնիվ, ինչո՞ւ պետք է ուզենք վեկտորը բազմապարկել մատրիցով։ Մտովի պարկերեք փարածության մեջ մի քանի վեկտոր՝ որպես սլաքներ։ Ինչպես կդասանենք հաջորդ թեմայում, վեկտորները մատրիցով բազմապարկելը երկրաչափորեն նույնն է, ինչ այդ վեկտորները ինչ-որ մի անկյան փակ պտտելը, և դրանց ինչ-որ ուղղությամբ սեղմելը կամ ձգելը։ Այլ կերպ ասած՝ երբ վեկտորները բազմապարկում ենք մատրիցով, դրանք *ձևափոխվում* են։

Ընդ որում՝ այդ ձևափոխությունը փեղի ունենալու ժամանակ պահպանվում են հետևյալ կանոնները՝

1. $A(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{u}$
2. $A(c \cdot \mathbf{v}) = c \cdot A\mathbf{v}$

այսինքն՝

1. ձևափոխել, հետո գումարել = գումարել, հետո ձևափոխել
2. ձգել, հետո ձևափոխել = ձևափոխել, հետո ձգել

Այս հատկությունների շնորհիվ մատրիցով բազմապարկման գործողությունը կանվանենք նաև *զծային ձևափոխություն*, և կասենք՝ A մատրիցը/զծային ձևափոխությունը **կիրառել** $\mathbf{v}$ վեկտորի վրա։ Այս մասին ավելի մանրամասն կխոսենք հաջորդ թեմայում։

այսպեղ սեղմելով transform՝ կդասենք, թե ինչ է փեղի ունենում վեկտորները բերված մատրիցով բազմապարկելիս

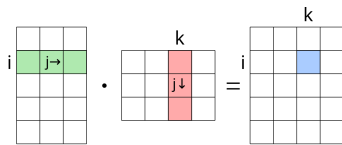


Նաթց. Բնչ մատրից կիրառենք $[4 \ 5]$ վեկտորի վրա, որպեսզի այն երկու անգամ ձգվի:

2.6 Մատրիցների բազմապատկումը

Եվ իհարկե, սահմանենք երկու մատրիցների արտադրյալը՝ մոտավորապես նույն սրամաքանությամբ:

A -ի սյուների թիվ $= B$ -ի տողերի թիվ



Սահմանում 2.5 Ենթադրենք A -ն $m \times n$ մատրից է, իսկ B -ն՝ $n \times k$ մատրից: A և B **մատրիցների արտադրյալը** կլինի $m \times k$ չափանի մատրից, որի i -րդ տողի j -րդ տարրը հավասար է A -ի i -րդ տողի և B -ի j -րդ սյան սկալյար արտադրյալին:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

$$\text{որտեղ } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}:$$

Այսինքն՝ ձախ մատրիցի ամեն մի տողը բազմապատկում ենք (սկալյարապես) աջ մատրիցի ամեն մի սյան հետ:

Օրինակ 2.7

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$\begin{aligned} CD &= \begin{bmatrix} -1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 & -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 7 \\ 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -19 \\ 23 & -8 & 11 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned}$$



Նաթց. Բնչ կատարվեն, եթե վերևի օրինակում բազմապատկենք այսպես՝ DC :



Զգուշացե՛ք. Երկու մատրից հնարավոր է բազմապարկել միայն եթե առաջին մատրիցի սյուների թիվը (այսինքն՝ դրա տողերի երկարությունը) համընկնում են երկրորդի տողերի թվի (սյուների երկարության) հետ:

Ներկաբար ոչ բոլոր մատրիցներն է հնարավոր իրարով բազմապարկել:



Նաթց. Վնարավոր է, որ երկու A , B մատրից կարելի լինի բազմապարկել այսպես՝ AB , բայց ոչ այսպես՝ BA :

Եթե չիմանայինք վեկտորների սկալյար արտադրյալի մասին, շարքաբորինակ կլինեք մատրիցների արտադրյալը այս ձևով սահմանելը (իրոք, կարող էինք պարզապես բազմապարկումը սահմանել ասենք՝ փարք առ փարք):

Իսկ այսպես սահմանելու դեպքում, եթե փորձեք օրինակ՝ ինչ-որ A մատրից բազմապարկել $\mathbf{v}$ վեկտորով, անկախ նրանից՝ $\mathbf{v}$ -ն կհամարեք վեկտոր և կօգտվեք [սահմանում 2.4](#)-ից, թե կհամարեք այն 1 սյունից բաղկացած մատրից ու կօգտվեք [սահմանում 2.5](#)-ից, երկու դեպքում էլ կստանաք նույնը:

նկատենք, որ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$

Նկատենք նաև, որ ինչպես բոլոր նախորդ գործողություններում, մատրիցների բազմապարկումը նույնպես օժտված է հետևյալ լավ հատկություններով՝

- $A(B + C) = AB + AC$ և $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(cB) = c(AB) = (cA)B$

փակագծերը կարող ենք բացել
կարևոր չէ՝ սկզբից BC -ն, թե AB -ն
ցանկացած $c \in \mathbb{R}$ թվի համար

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Johnston], 121-124 (գծային տարածություններ), 35-38 (գծային ձևափոխություններ) էջերը
- կարդալ [Poole], 219-221 էջերը (մատրիցների արտադրյալ)
- դիտել 3b1b-ի [3-րդ տեսադասը](#) գծային հանրահաշվից

2.7 Խնդիրներ

Նման խնդրի լուծում

$\mathbb{R}^2$ հարթության ո՞ր ուղիղն է սա

Խնդիր 2.1 Արդյո՞ք տրված բազմությունը գծային տարածություն է.

ա. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \mid \text{բոլոր } a \in \mathbb{R} \text{ թվերի համար} \right\}$

բ. $B = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \mid \text{բոլոր } a \in \mathbb{R} \text{ թվերի համար} \right\}$

գ. $C = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \mid \text{բոլոր } a \in \mathbb{R} \text{ թվերի համար} \right\}$

դ. $D = \mathbb{Z}$ ամբողջ թվերի բազմությունը

ե. $ax + b$ փեսքի բոլոր բազմանդամների բազմությունը

զ. $ax + b$ փեսքի այն բազմանդամների բազմությունը, որոնցում $a \neq 0$



Նուշում. Եթե ցույց տանք, որ 1-9 պայմաններից գոնե մեկը խախտվում է, ապա բազմությունը գծային տարածություն չէ: Եթե բոլոր 1-9 պայմանները միշտ տեղի ունեն, ապա բազմությունը գծային տարածություն է:

Խնդիր 2.2 Ի՞նչ կստանանք

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

մաթրիցը կիրառելով հետևյալ վեկտորների վրա.

ա. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

բ. $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

գ. $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Կոորդինատային հարթության վրա պատկերեք վեկտորներից յուրաքանչյուրը մինչև A -ով բազմապատկելը և դրանից հետո: Ի՞նչ եք տեսնում, ի՞նչ է անում մաթրիցը վեկտորների հետ: Կարող եք գուշակել, թե ինչպես կձևափոխվի $\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ վեկտորը:

Խնդիր 2.3 Նաշվեք մաթրիցների արտադրյալը.

ա. AB , որտեղ $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

բ. $(A - B)(A + B)$, որտեղ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

գ. $A^2 - B^2$, նույն A ու B -ով, ինչ p -ում

Նո՞յնն են արդյոք p -ում ու q -ում ստացված մաթրիցները:

անգլերեն՝ *shear matrix*

Խնդիր 2.4 Դիտարկենք հետևյալ մաթրիցը (կոչվում է *շեղման* կամ *սահքի մաթրից*)՝

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ա. ի՞նչ կստանանք, եթե S -ը կիրառենք $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ վեկտորի վրա

բ. ի՞նչ կստանանք, եթե S -ը կիրառենք ստացված վեկտորի վրա

- գ. ի՞նչ կստանանք, եթե մի անգամ էլ կիրառենք S -ը
 դ. ի՞նչ եք կարծում, ի՞նչ կստանանք, եթե S -ը կիրառենք 100 անգամ
 այդ վեկտորի վրա
 ե. կարո՞ղ եք հաշվել S^{100} -ը

Խնդիր 2.5 Ենթադրենք A -ն այնպիսի մատրից է, որ

լուծում

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Քանի՞նչ քանիսի վրա է A մատրիցը: Գտեք A -ն:

3.1 Գծային ձևափոխությունները երկրաչափորեն

Նախորդ թեմայից հետո ծագում է հետևյալ հարցը.

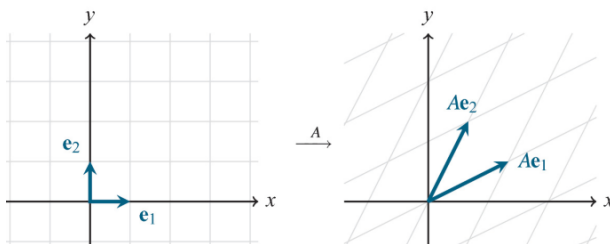
— Ուրեմն մաթրից = թվերի աղյուսակ, այդքան բա՛ն

Շարապենք հանգստացնել. պարասխանն է՝ ոչ, բացարձակապես ոչ, մաթրիցներն ընդամենը թվերի աղյուսակներ չեն, և Դուք ստիպված չեք լինելու ձանձրալի ու անհեղափոխ թվեր բազմապարկելով զբաղվել: Ինչպես ամեն վեկտոր ոչ այլ ինչ է, քան փարածության մեջ ինչ-որ մի սլաք, այդպես էլ մաթրիցները՝ գծային ձևափոխությունները, գեղեցիկ երկրաչափական գաղափարներ են:

Պարկերացրեք՝ թղթի վրա նկարել ենք կոորդինատային առանցքները և մի քանի վեկտորներ: Եթե ենթադրենք, որ թուղթը ռեզինից է, և ձգել-սեղմելուց չի պարռվում, այլ լոճվում է, ապա կարող ենք այն, օրինակ,

- պտտել 40° -ով
- ձախ ու աջ կողմերից ձեռքով բռնել և ձգել
- վերևից ու ներքևից բռնել և ներս սեղմել
- վերևից ու ներքևից բռնել և ներս սեղմել, ապա 15° -ով պտտել

Ամեն անգամ թղթի վրայի բոլոր վեկտորները իրենց նախորդ դիրքի համեմատ կպտտվեն, կձգվեն, կսեղմվեն, այսինքն՝ կձևափոխվեն ինչպես մնացած վեկտորները: Ահա հենց այդպիսի ազդեցություն է լինում, երբ փարածության մեջ ինչ-որ վեկտորներ բազմապարկում ենք մաթրիցով:



Իրոք, ի՞նչ է պեղի ունենում, երբ օրինակ՝ 2×2 չափանի A մաթրիցը կիրառում ենք $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ վեկտորի վրա. ստանում ենք մեկ այլ՝ նոր $\mathbf{u} = A\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ վեկտոր: Այս նոր, ձևափոխված $\mathbf{u}$ վեկտորը նույն հին ու բարի $\mathbf{v}$ -ն է՝ պարզապես ինչ-որ անկյան փակ **պտտած**, **ձգած** կամ **սեղմած** և, հնարավոր է, **շրջած** (ֆիք արած): Թե քանի աստիճանով պտտած և հորիզոնական/ուղղահիգ ուղղությամբ քանի անգամ է այն ձգած՝ կախված է մաթրիցի մեջ գրված թվերից, բայց բուն գաղափարն այն է, որ փրկված A մաթրիցը *ինչ գործողություններն են որնում է որևէ վեկտորի հետ, նույն գործողությունները անում է նաև բոլոր մյուս վեկտորների հետ*, այն այդ վեկտորների վրա կիրառելիս:

3.1 Գծային ձևափոխությունները երկրաչափորեն	27
3.2 Ձևափոխությունների արտադրյալ	28
3.3 Միավոր մաթրից	29
3.4 Նակադարձ	31
3.5 Որոշիչ	32
3.6 Նակադարձելիություն	34
3.7 Նեյք	35
3.8 Խնդիրներ	37



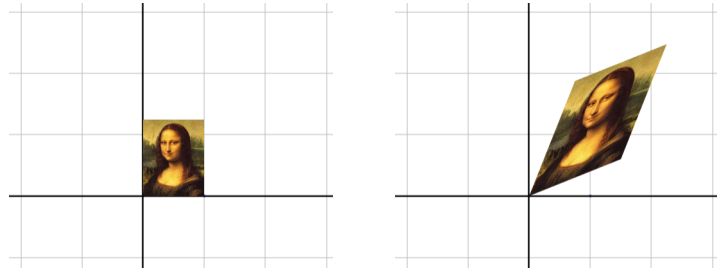
Ի՞նչ կլինի խիսկալիների հետ, եթե գուլ-պան ձախից ու աջից բռնենք և քաշենք

գործողություն = պտույտ, ձգում, սեղմում, շրջում (որոշ հերթականությամբ)

Մոնա Լիզան՝

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.6 \\ 0.6 & 1.5 \end{bmatrix}$$

մապրիցից առաջ և հետո (փորձել)



Այլ կերպ ասած՝ եթե վեկտորները փարածության մեջ սլաքներ են, ապա մապրիցները այդ սլաքների պարամետրերը, ձգումները, սեղմումներն ու շրջումներն են:

Նաջորդ թեմայում կպարզենք նաև, թե ինչպես մապրիցի թվերին նայելով հասկանալ, թե այն ինչպե՞ն է ձևափոխում փարածությունը: Մինչ այդ օգտակար կլինի փորձարկել փարբեր մապրիցներ և սեփական աչքով տեսնել դրանց կապարած ձևափոխությունները՝ անցնելով [այսպեղ](#) կամ [այսպեղ](#):



Նաթց. Ի՞նչ են անում հետևյալ գծային ձևափոխությունները.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Զգուշացե՛ք. Երբ ասում ենք՝ մապրիցները պարտում, ձգում, սեղմում, շրջում են վեկտորները, նկատի չունենք, որ ամեն մապրից միայն սեղմում է կամ միայն շրջում. մապրիցը կարող է, օրինակ՝



1. նախ պտտել փարածությունը,
2. հետո սեղմել հորիզոնական ուղղությամբ,
3. հետո նորից պտտել,
4. ապա ձգել ուղղահիգ ուղղությամբ:

3.2 Ձևափոխությունների արտադրյալ

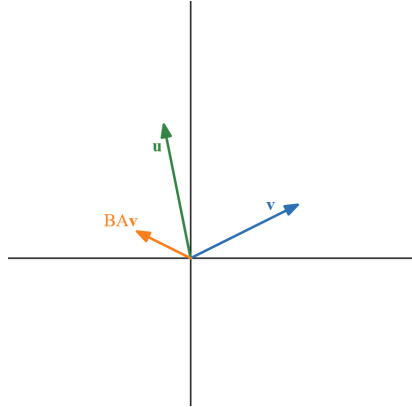
Փաստորեն՝ մապրիցը վեկտորով բազմապատկել նշանակում է որոշակի ձևով պտտել-ձգել վեկտորը: Իսկ ի՞նչ է նշանակում մապրիցը բազմապատկել մապրիցով:

Ենթադրենք $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ որևէ վեկտոր է, իսկ $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ինչ-որ մապրիցներ են:

Եթե $\mathbf{v}$ վեկտորի վրա կիրառենք A -ն՝ $\mathbf{v}$ -ն կձևափոխվի, և կստանանք մի նոր վեկտոր՝ $A\mathbf{v}$: Նարմարության համար ստացվածը նշանակենք $\mathbf{u}$ -ով: Եթե հիմա $\mathbf{u}$ -ի վրա կիրառենք B -ն, ապա այն կձևափոխի $\mathbf{u}$ -ն, և կունենանք մի նոր վեկտոր՝ $B\mathbf{u}$:

Արդյունքում ստացանք՝

$$B\mathbf{u} = B(A\mathbf{v}) = (BA)\mathbf{v},$$



ասել է թե՛ BA մատրիցը կիրառած v վեկտորի վրա: Փաստորեն B և A գծային ձևափոխությունների (մատրիցների) արտադրյալը կիրառելը նույնն է, ինչ եթե նախ կիրառես A -ն, ապա B -ն:

$$BA = \left(\text{կիրառիր } A\text{-ն, ապա } B\text{-ն} \right)$$

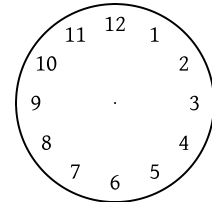


Նաթգ. Պարկերացրե՛ք A -ն 30° -ով պտույտն է, իսկ B -ն՝ ուղղաձիգի նկատմամբ հայելային արտասպարկերումը (շրջումը): Ի՞նչ է ցույց տալիս AB -ն: Իսկ BA -ն:

Ենթադրենք A -ն այն մատրիցն է, որը վեկտորները պտտում է 30° -ով (ժամսլաքի ուղղությամբ), B -ն՝ 50° -ով, իսկ C -ն՝ 260° -ով:



Նաթգ. Ի՞նչ է անում BA մատրիցը: Իսկ CBA -ն:



պտույտներն ու շրջումները հարմար է պարկերացնել ժամացույցի վրա

3.3 Միավոր մատրից

Եթե օրինակ մատրիցը հորիզոնական ուղղությամբ 2 անգամ ձգում է բոլոր վեկտորները՝

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

իսկ ուղղաձիգ ուղղությամբ ոչինչ չի անում, ապա այն վեկտորները, որոնց առաջին կոորդինատը 0 է, ձևափոխության արդյունքում չեն փոփոխվում:

Իսկ ո՞ր մատրիցն է, որ բոլոր վեկտորները թողնում է իրենց փեղերում, ոչ մեկին չի փոփոխում: Փորձենք պարզել:

x -երի առանցքի վրայի վեկտորները

Սահմանում 3.1 A -ն կոչվում է **քառակուսային** մատրից, եթե նրա տողերի ու սյուների թիվը համընկնում է:

$n \times n$ չափանի

Սահմանում 3.2 A քառակուսային մատրիցը կոչվում է **սիմետրիկ** (համաչափ), եթե $A^T = A$:

շրջելուց հետո մնում է նույնը

Օրինակ 3.1 Ներկայացված մատրիցը սիմետրիկ է (ուստի և քառակուսային)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Եթե մտովի գիծ րանենք A մատրիցի վերևի ձախ անկյունից դեպի ներքևի աջ անկյունը, կստանանք նրա *գլխավոր անկյունագիծը*, որի նկատմամբ A -ն սիմետրիկ է. 0-ի համաչափը 0-ն է, 1-ի համաչափը՝ 1-ը, և այլն:

A -ն կարող է ջլինել քառակուսային

Սահմանում 3.3 A մատրիցի *գլխավոր անկյունագիծ* (կամ պարզապես *անկյունագիծ*) ենք անվանում նրա a_{ii} տեսքի տարրերը, որոնց տողերի ու սյուների համարները համընկնում են՝ $a_{11}, a_{22}, \dots$:

Մյուս անկյունագիծը՝ վերևի աջ անկյունից դեպի ներքևի ձախ, կոչվում է *երկրորդ անկյունագիծ*:

Օրինակ 3.2 Այսպես կարմիրով նշված է գլխավոր անկյունագիծը՝

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix}$$

իսկ այսպես՝ երկրորդ անկյունագիծը.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \color{red}{1} \\ 0 & \color{red}{1} & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Վերադառնանք մեր հարցին. ո՞ր մատրիցով բազմապարկելիս է ամեն բան մնում իր տեղում:

կասենք՝ նույնական ձևափոխություն

Սահմանում 3.4 n -չափանի *միավոր մատրից* է կոչվում այն քառակուսային մատրիցը, որի անկյունագծի վրա 1-եր են, իսկ մնացած բոլոր տեղերում՝ 0-ներ:

n -չափանի միավոր մատրիցը կարճ կնշանակենք I_n -ով:

Օրինակ 3.3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Դժվար չէ ապացուցել, որ միավոր մատրիցով բազմապարկելիս վեկտորները չեն փոխվում՝

$$I_n \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \text{երբ } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

Եվ ավելին, ցանկացած $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ մատրիցի և միավոր մատրիցի

արտադրյալը ինքը՝ A -ն է.

$$I_m A = A = A I_n$$



Նաթց. Ի՞նչ են նշանակում $I_m A$ և $A I_n$ արտադրյալները:

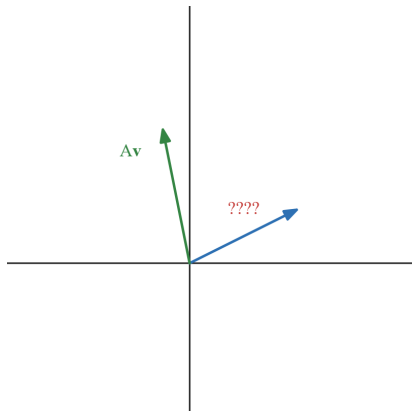
3.4 Նակադարձ



Նաթց. Անիկ իր հասակը բազմապատկեց 4-ով, հասնեց 15, բաժանեց 13-ի և ստացավ 53 սմ: Որքա՞ն է Անիկի հասակը:

Պարասխանը գրնելու համար քայլերը կանենք հակառակ հերթականությամբ՝ 53-ը կբազմապատկենք 13-ով, կգումարենք 15 և կբաժանենք 4-ի, արդյունքում կստանանք Անիկի հասակը:

Իսկ ի՞նչ, եթե ունենք մի $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ անհայտ վեկտոր, որը ինչ-որ A մատրիցով ենթարկվել է գծային ձևափոխության: Ինչպե՞ն ունենալով $A\mathbf{v}$ -ն՝ վերականգնենք սկզբնական $\mathbf{v}$ վեկտորը:



Այլ կերպ ասած՝ ունենալով A մատրիցը, ինչո՞վ բազմապատկել $A\mathbf{v}$ վեկտորը, որպեսզի ստացվի $\mathbf{v}$: Կամ՝

$$\text{ի՞նչ} \times A = I$$

I ասելով նկատի ունենք համապատասխան չափի միավոր մատրիցը

Այդ անհայտ ձևափոխությունը անվանում ենք A գծային ձևափոխության (կամ մատրիցի) **հակադարձ** և նշանակում A^{-1} -ով:

Սահմանում 3.5 Տրված A մատրիցի **հակադարձ** կանոններն այն A^{-1} մատրիցն, որի համար

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Եթե գրնենք A^{-1} -ը, ապա կկիրառենք այն մեր ունեցած $A\mathbf{v}$ -ի վրա և կստանանք՝ $A^{-1}(A\mathbf{v}) = (A^{-1}A)\mathbf{v} = I\mathbf{v} = \mathbf{v}$:

Նաթ. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ գծային ձևափոխությունը վերցնում է վեկտորը և



1. հորիզոնական ուղղությամբ ձգում 2 անգամ,
2. ապա 30° -ով պտտում,
3. ապա ուղղահիգ ուղղությամբ սեղմում 3 անգամ,
4. ապա սրացվածը շրջում x -երի առանցքի նկարում:

Ննարավոր է ունենալով $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ -ն՝ գտնել $\mathbf{u}$ -ն:

Պատասխանն է՝ այո, այսինքն՝ A մաթրիցն ունի հակադարձ (հակադարձելի է): Ինչպես կրեսնենք, միայն որոշ բառակուսային մաթրիցներ ունեն հակադարձ:



Նաթ. Նակորն իր հասակին գումարեց 6, բազմապատկեց 0-ով, հանեց 18 և սրացավ -18 սև: Կարող եք գտնել Նակորի հասակը:

3.5 Որոշիչ

Բնականաբար, հարց է առաջանում. իսկ ինչպես գտնել փրկած ձևափոխության հակադարձը, կամ առհասարակ ինչպես պարզել՝ այն ունի հակադարձ, թե ոչ:

Այդ նպատակով հերագուրենք մի այսպիսի փարօրինակ օբյեկտ:

Սահմանում 3.6 2×2 չափանի

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

մաթրիցի որոշիչ կանվանենք հետևյալ թիվը՝

$$\det(A) = ad - bc$$

անգլերեն՝ *determinant*

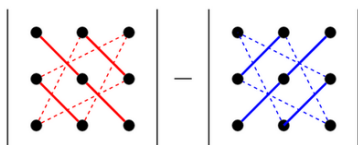
Օրինակ 3.4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

մաթրիցի որոշիչն է՝

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23$$

Փոքր-ինչ ավելի բարդ բանաձևով նաև 3×3 մաթրիցի համար՝



Սահմանում 3.7 3×3 չափանի

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

մաթրիցի որոշիչ կանվանենք հետևյալ թիվը՝

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\det A = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

ձեռքով հաշվելիս հարմար է աջից արտագրել մատրիցի առաջին երկու սյուները, ապա հաշվել այսպես

Օրինակ 3.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

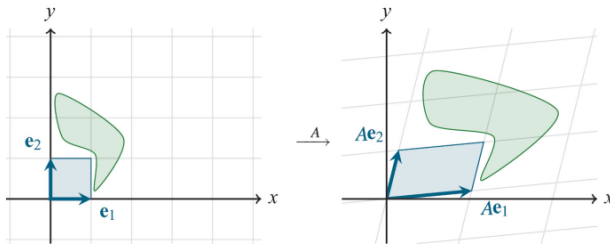
մատրիցի որոշիչն է՝

$$\det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0$$

Այսքանի վրա կանգ առնենք: Ի՞նչ են ցույց տալիս այս բանաձևերը, ի՞նչ է նշանակում մատրիցի/ձևափոխության որոշիչը:

Դիտարկենք մեր $\mathbb{R}^2$ հարթությունը: x -երի առանցքի վրա վեցնենք $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ միավոր վեկտորը, իսկ y -ների առանցքի վրա՝ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ միավոր վեկտորը: Դրանցով կազմված փոքրիկ քառակուսին կանվանենք *միավոր քառակուսի*:

միավոր = 1 երկարությամբ



A ձևափոխությունը կիրառելուց հետո e_1 -ն ու e_2 -ը պարպվելով-ձգվելով վերածվում են Ae_1 և Ae_2 վեկտորների: Քանի որ միավոր քառակուսին կազմված էր այդ երկու վեկտորներից, ապա այն նույնպես ձևափոխվում է (պարպվում-ձգվում և այլն) ու դառնում արդեն A_1 և A_2 վեկտորներով սրացվող *գուգահեռագիծ*:

Եթե ձևափոխությունից առաջ միավոր քառակուսու մակերեսը 1 էր, ապա ձևափոխությունից հետո սրացված գուգահեռագծի մակերեսը $|\det(A)|$ է: Ավելին, ոչ միայն միավոր քառակուսու, այլ *ցանկացած* պարկերի դեպքում՝ երբ կիրառում ենք A ձևափոխությունը, այն փոփոխվում է, իսկ նրա մակերեսը մեծանում/փոքրանում է $|\det(A)|$ անգամ:

մրբում պարկերացրեք կետերի շարժը

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր գծային ձևափոխություն կիրառելիս պարկերների մակերեսները որոշ չափով ձգվում կամ սեղմվում են, և նրա որոշիչը ցույց է տալիս, *թե քանի անգամ են մակերեսները ձգվում*. որոշիչը հենց այդ ձգման գործակիցն է (անգլերեն՝ *scaling factor*):

փաստորեն օրինակ՝ M ձևափոխության արդյունքում Մոնա Լիզան մեծանում է $\det(M) = 1.89$ անգամ



Նաթց. Որքա՞ն է I_n նույնական ձևափոխության որոշիչը:

Արդեն իմանալով որոշիչի իմաստը՝ ձևակերպենք դրա հատկությունները:

n -ը մատրիցի չափն է

Թեորեմ 3.1 Զանկացած $n \times n$ չափանի A, B մատրիցների համար

1. $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$ ցանկացած $c \in \mathbb{R}$ թվի համար
2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. եթե A -ն ունի հակադարձ, ապա $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4. $\det(I) = 1$
5. $\det(A^T) = \det(A)$
6. եթե A -ի տողերից/սյուներից որևէ մեկը բաղկացած է միայն 0-ներից, ապա $\det(A) = 0$
7. եթե $\det(A) < 0$, ապա A -ն նաև շրջում է տարածությունը:



Նաթ. Ինչո՞ւ են ճիշտ 1-4 հատկությունները:

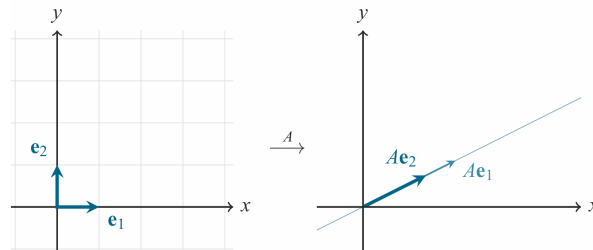
Նշենք, որ 4×4 , 5×5 և ավելի մեծ չափանի քառակուսային մատրիցների որոշիչները հաշվելու համար նույնպես կան փարբեր բանաձևեր (իսկ ոչ քառակուսային մատրիցները **որոշիչ չունեն**), բայց դրանց հաշվողական մասը մեզ հետաքրքիր չէ: Օգտակար կլինի նաև իմանալ, որ

Թեորեմ 3.2 Եթե մատրիցի տողերից կամ սյուներից որևէ մեկը

- բազմապատկենք ինչ-որ c թվով, ապա որոշիչը կմեծանա c անգամ,
- գումարենք որևէ այլ տողի/սյան, ապա որոշիչը չի փոխվի:

3.6 Նակադարձելիություն

Իսկ ի՞նչ, եթե գծային ձևափոխության որոշիչը 0 է:



$\mathbb{R}^3$ -ի դեպքում՝ նաև հարթություն

Նշանակում է՝ ցանկացած պարկերի մակերեսը ձևափոխությունից հետո դառնում է 0: Այսինքն ձևափոխությունը փարածության մեջ եղած ամեն ինչ սեղմում-ճզմում է՝ դարձնելով զրո մակերեսով ինչ-որ բան ($\mathbb{R}^2$ -ի դեպքում՝ ուղիղ կամ պարզապես կետ):



Նաթ. A մատրիցը յուրաքանչյուր $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ վեկտորի տրանսում է դեպի $\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}$: Ո՞ր վեկտորները A -ն կիրառելիս կդառնան $\begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}$:

Այս դեպքում եթե վերցնենք որևէ $\mathbf{v}$ վեկտոր, կիրառենք A -ն (ճզմելով փարածությունը) և փորձենք $A\mathbf{v}$ -ից հետո գնալ դեպի սկզբնական $\mathbf{v}$ վեկտորը, ապա որքան էլ ուզենք՝ չենք կարող պարզել, թե որն էր $\mathbf{v}$ -ն,

քանի որ $\mathbf{v}$ -ի հետ նույն գծի վրա գտնվող բազմաթիվ այլ վեկտորներ ևս ճգնվելով դարձել են $A\mathbf{v}$:

Թեորեմ 3.3 A քառակուսային մատրիցն ունի հակադարձ այն և միայն այն դեպքում, եթե $\det(A) \neq 0$:

ոչ քառակուսային մատրիցները ևս հակադարձ չունեն

Ինչպես կարող ենք ստուգել, 2×2 չափանի

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

մատրիցի հակադարձը (եթե $\det(A) \neq 0$) կարելի է գտնել հետևյալ բանաձևով՝

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ստուգեք, որ $AA^{-1} = I_2$

Օրինակ 3.6 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ մատրիցը հակադարձելի է և

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$



Նաթ. Սկզբից կիրառել ենք A ձևափոխությունը, այնուհետև B -ն, և ստացել ենք $\mathbf{u}$: Ինչպես գտնենք սկզբնական վեկտորը:

Ավելի մեծ չափանի հակադարձները հաշվելու համար նույնպես կան բավական հեղափոխական բանաձևեր և ալգորիթմներ, բայց մենք դրանց նույնպես ուշադրություն չենք դարձնի: Նկատենք միայն, որ

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.7 Ներք

Որոշիչից բացի սահմանենք նաև մատրիցի հետքը:

Սահմանում 3.8 A քառակուսային մատրիցի **հետք** կանվանենք նրա անկյունագծի վրա գտնվող տարրերի գումարը՝

անգլերեն՝ *trace*

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Օրինակ 3.7

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

մատրիցի հետքն է՝

$$\text{tr}(A) = 2 + (-3) + 6 = 5$$

Ի՞նչ է ցույց տալիս հետքը: Այս մասին կխոսենք ավելի ուշ: Առայժմ ֆիքսենք դրա հարկությունները:

Թեորեմ 3.4 *Ցանկացած $n \times n$ չափանի A, B մատրիցների համար*

1. $\text{tr}(cA) = c \cdot \text{tr}(A)$ *ցանկացած $c \in \mathbb{R}$ թվի համար*
2. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
4. $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

Ինչպես տեսնում ենք, մատրիցի հետքը հարուստ է շատ օգտակար հատկություններով: Ինչ-որ իմաստով՝ նրա սահմանումը միակն է, որ կարող է բավարարել բոլոր վերոնշյալ 4 հատկություններին:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Poole], 221–223 էջերը (ձևափոխության հակադարձ)
- կարդալ [Johnston], 254–256 (հետք), 258–263 (որոշիչ) էջերը
- դիտել Յb1b-ի 4-րդ և 6-րդ տեսադասերը գծային հանրահաշվից
- ըստ ցանկության՝ նաև 7-րդը
- տեսնել որոշ մատրիցներ *սեփական աչքով*

3.8 Խնդիրներ

Խնդիր 3.1 Ձևափոխության նկարագրությունը համապատասխանեցրեք իր մատրիցին.

Նկարագրություն՝

- ա. պտտում է 70° -ով
- բ. ոչինչ չի անում
- գ. շրջում է x -երի առանցքի շուրջ
- դ. y -ների ուղղությամբ ձգում է 5 անգամ
- ե. ամեն բան փանում է $y = 6x$ ուղղի վրա
- զ. ամեն բան փանում է $y = 6x + 1$ ուղղի վրա

Մատրից՝

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ | 4. $\begin{bmatrix} 0.342 & -0.939 \\ 0.939 & 0.342 \end{bmatrix}$ |
| 2. այդպիսի մատրից չկա | 5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | 6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}$ |



Նուշում. Նաշվեք որոշիչները: Ներկեք նաև, թե ո՞ր է գնում 0-ն:

Խնդիր 3.2 Ինչի՞ր է հավասար մատրիցի որոշիչը, եթե այն

- ա. ամեն ինչ պտտում է 14° -ով և 1.5 անգամ ձգում x -երի ուղղությամբ
- բ. *ա.* մատրիցի հակադարձն է
- գ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ վեկտորը փանում է $\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$, իսկ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ -ը՝ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$
- դ. ունի հեքսյալ փեսքը՝ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- ե. ունի հեքսյալ փեսքը՝ $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
- զ. *ե.* մատրիցն է՝ բարձրագրած խորանարդ

Խնդիր 3.3 Եթե վերցնենք $x^2 + y^2 = 1$ միավոր շրջանագիծը և 2 անգամ ձգենք x -երի առանցքի ուղղությամբ, արդյունքում կստանանք *Էլիպս*: Որքա՞ն կլինի դրա մակերեսը:

(0, 0) կենտրոնով և 1 շառավիղով

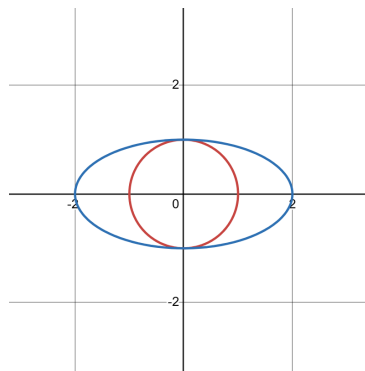
Կարո՞ղ եք ընդհանրացնելով արդյունքը՝ ստանալ բանաձև Էլիպսի մակերեսի համար:

Խնդիր 3.4 Նայարնի է, որ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցը ինչ-որ $\mathbf{v}$ վեկտորի փանում է դեպի

ա. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



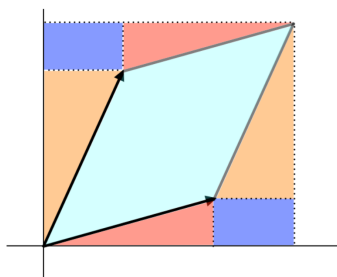
բ. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Կարո՞ղ եք գտնել $\mathbf{v}$ վեկտորը:

Խնդիր 3.5 Ենթադրենք արված է

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

այս գծագիրը կարող է օգնել



մատրիցը: A -ն կիրառելիս

ա. որպե՞նի է գնում $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ վեկտորը

բ. որպե՞նի է գնում $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ վեկտորը

գ. ինչո՞ւ է դրանցով ստացված զուգահեռագծի մակերեսը հավասար $|\det(A)|$ -ին

Խնդիր 3.6 Ինչպես գիտենք, ցանկացած մատրից միավոր մատրիցով բազմապատկելիս մնում է նույնը: Տեղերով փոխենք I_4 մատրիցի երկրորդ և երրորդ սյուղերը՝

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ա. ի՞նչ է լինում 4×4 չափի մատրիցի հետ, երբ այն բազմապատկում ենք B -ով (ենթադրենք՝ ձախից)

բ. որքա՞ն է B -ի որոշիչը

գ. ինչպե՞ս է փոխվում մատրիցի որոշիչը, երբ նրա երկրորդ ու երրորդ սյուղերը փոխվում են

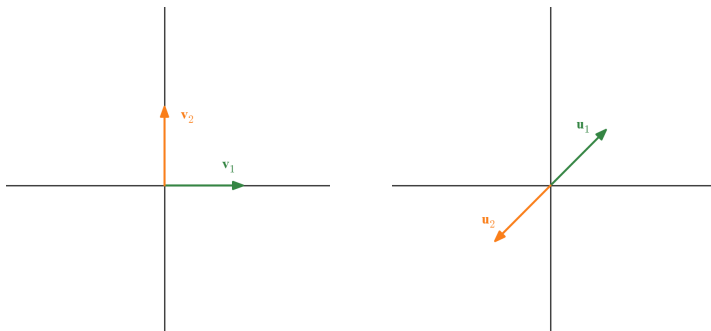
դ. ինչպե՞ս կընդհանրացնեք ստացված արդյունքը

Գծային փարածությունների կառուցվածքը

4

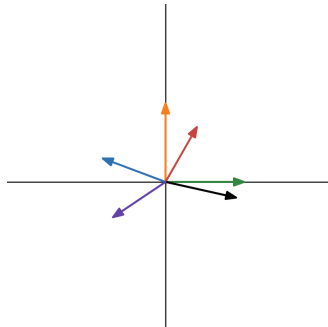
4.1 Գծային թաղանթ

Ինչո՞ւ ենք գծային փարածությունների և ձևափոխությունների մասին խոսելիս առանձնահատուկ ուշադրություն դարձնում ձախում պարկերված երկու վեկտորներին, այլ ոչ թե ասենք՝ աջ կողմի երկու վեկտորներին:



— Որովհետև ձախ կողմի երկու վեկտորներով կարելի է սրանալ հարթության ցանկացած այլ վեկտոր,— կասեր Դուք:

Իսկ ինչո՞ւ սահմանափակվել $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ -ով, ինչո՞ւ չնայել այս վեկտորներին՝



Որովհետև սրանք արդեն չափից շատ են. $\mathbb{R}^2$ -ում բավարար է ունենալ երկու վեկտոր (առաջին նկարի նման), և դրանցով կարելի է սրանալ ցանկացած այլ վեկտոր:

Նստակ ձևակերպենք, թե ինչ նկարի ունենք «ցանկացած վեկտոր սրանալ» ասելով: Եթե

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ապա $\mathbb{R}^2$ փարածության յուրաքանչյուր $\mathbf{u}$ վեկտոր կարող ենք գրել

$$\mathbf{u} = (\text{ինչ-որ բան}) \cdot \mathbf{v}_1 + (\text{ինչ-որ բան}) \cdot \mathbf{v}_2$$

4.1 Գծային թաղանթ	39
4.2 Գծորեն անկախություն . . .	42
4.3 Նենք	43
4.4 Նենքի փոփոխություն . . .	45
4.5 Սեփական արժեք և վեկտոր	46
4.6 Խնդիրներ	50

ստացվում է: Օրինակ՝ $\begin{bmatrix} 4 & -7 \end{bmatrix}$ վեկտորը կգրենք որպես՝

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-7) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2$$

Այս դեպքում ասում ենք, որ $\begin{bmatrix} 4 & -7 \end{bmatrix}$ վեկտորը $\mathbf{v}_1$ և $\mathbf{v}_2$ վեկտորների գծային զուգակցություն է կամ պարկանում է $\mathbf{v}_1$ -ի և $\mathbf{v}_2$ -ի գծային թաղանթին:

Սահմանում 4.1

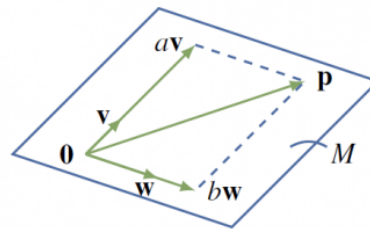
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$$

որտեղ $c_1, \dots, c_k$ ցանկացած թվեր են

տրևաքի ցանկացած արտահայտություն կանխանենք $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ վեկտորների գծային զուգակցություն (կոմբինացիա):

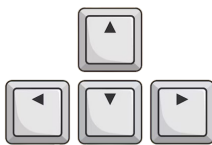
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ վեկտորների բոլոր հնարավոր գծային զուգակցությունների բազմությունը կանխանենք այդ վեկտորների գծային թաղանթ.

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

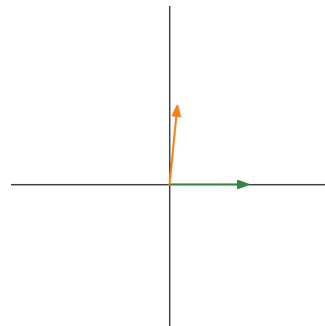


այսպես $\mathbf{p} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$

Երկրաչափորեն՝ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ վեկտորների գծային թաղանթը բոլոր այն վեկտորներն են, որոնք կարելի է ստանալ այդ վեկտորները ձգելով, սեղմելով և իրար գումարելով:



Նաթղ. Ո՞րն է $\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow$ կոճակների գծային թաղանթը: Իսկ $\leftarrow, \rightarrow$ կոճակների՞նը: Իսկ $\leftarrow$ -ի՞նը:

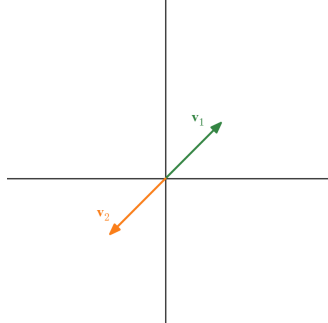


Նաթղ. Նկարավոր է $\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$ վեկտորը արտահայտել $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ -ի և $\begin{bmatrix} 0.1 & 1 \end{bmatrix}$ -ի գծային զուգակցությամբ:

Օրինակ 4.1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

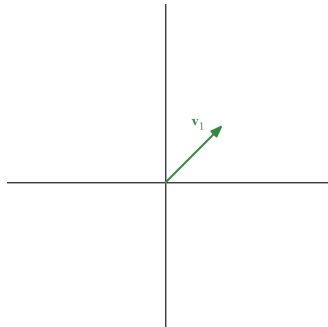
վեկտորների գծային թաղանթը կրկին $\mathbb{R}^2$ -ն է:

**Օրինակ 4.2**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

վեկտորների գծային թաղանթը $y = x$ ուղիղն է, քանի որ երկուսն էլ ընկած են այդ ուղղի վրա. հնարավոր չէ դրանք ձգելով-գումարելով ստանալ այդ ուղղից դուրս վեկտոր:

Ընդ որում, բավարար է վերցնել դրանցից միայն մեկը.

**Օրինակ 4.3**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

վեկտորի գծային թաղանթը նույնպես $y = x$ ուղիղն է:

բազմապատկելով -1 -ով՝ կստանանք v_2



Նաթ. Ո՞րն է $y = kx$ ուղղի վրա ընկած երկու վեկտորների գծային թաղանթը: Իսկ երեք վեկտորների՝:

Նախորդ օրինակներում վեկտորների թաղանթը մի դեպքում ստացվեց հարթություն, մյուս դեպքում՝ ուղիղ: Կարելի է ապացուցել, որ

Թեորեմ 4.1 Վեկտորների գծային թաղանթը գծային տարածություն է:

Եթե վեկտորները $\mathbb{R}^n$ -ում են, դրանց թաղանթը $\mathbb{R}^n$ -ի ենթադարձություն է:

4.2 Գծորեն անկախություն

Բայց դրն է պարզապես, որ մի դեպքում երկու վեկտորների գծային թաղանթը ամբողջ փարածությունն է, մեկ այլ դեպքում՝ ինչ-որ մի ուղիղ:

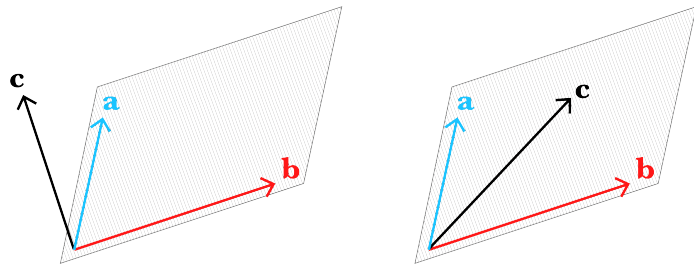
Տարբերությունն այն էր, որ երկրորդ դեպքում վեկտորները ընկած էին նույն ուղիղ վրա, այսինքն հնարավոր էր դրանցից մեկը արտահայտել մյուսով: Նման դեպքերում կասենք, որ վեկտորները **գծորեն կախված** (կախյալ) են:

Մահմանում 4.2 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ վեկտորները կոչվում են **գծորեն անկախ**, եթե դրանցից ոչ մեկը հնարավոր չէ արտահայտել մյուսների գծային գումարման միջոցով:

Եվ իհարկե, կասենք, որ վեկտորները **գծորեն կախված** են, եթե դրանցից որևէ մեկը (ասենք՝ $\mathbf{v}_n$ -ը) հնարավոր է արտահայտել մյուսներով՝

$$\mathbf{v}_n = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}$$

առաջին նկարում $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -ն գծորեն անկախ են, երկրորդում ոչ



Նաթ. Անցեք հղումով և խաղացեք a -ի ու b -ի հետ: Ի՞նչ վեկտորներ եք ստանում: Իսկ այսպե՛հ:

Երկրաչափորեն,

- երկու վեկտորներ գծորեն կախված են, եթե դրանք ընկած են միևնույն ուղիղ վրա
- երեք վեկտորներ գծորեն կախված են, եթե դրանք ընկած են միևնույն հարթության մեջ

և այլն:



Նաթ. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ վեկտորներից մեկը $\mathbf{0}$ է: Կարո՞ղ են դրանք լինել գծորեն անկախ:

Վեկտորների գծորեն անկախությունը սպուգելիս երբեմն հարմար է օգտվել հետևյալ թեորեմից (որը կարող եք ապացուցել):

Թեորեմ 4.2 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ վեկտորները գծորեն անկախ այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\ll c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \gg$$

հավասարությունը տեղի ունի միմիայն այն դեպքում, երբ $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$:

այսինքն՝ 0-ից բացի ինչ թվեր էլ դնենք, գումարը 0 չի լինի

4.3 Նենք

Փաստորեն մեր

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

վեկտորները գծորեն անկախ են, և նրանց գծային թաղանթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ -ն է: Նման դեպքերում ասում ենք, որ $\mathbf{v}_1$ -ն ու $\mathbf{v}_2$ -ը կազմում են $\mathbb{R}^2$ տարածության *հենք* կամ *բազիս*:

Սահմանում 4.3 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ վեկտորները կոչվում են V գծային տարածության *հենք* (կամ *բազիս*), եթե

1. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ գծորեն անկախ են, և
2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ -ի գծային թաղանթը ամբողջ V -ն է:

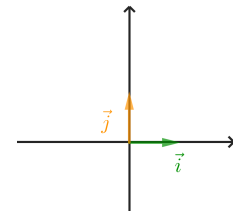
Այսինքն՝ V -ի ցանկացած վեկտոր կարելի է արտահայտել $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ -ով, և դրանցից ոչ մեկն ավելորդ չէ. եթե $\mathbf{v}_i$ -երից որևէ մեկը հեռացնենք, այն այլևս չի լինի հենք:

Ավելին, ցանկացած վեկտոր տվյալ հենքով կարելի է արտահայտել ուղիղ *մեկ ձևով*. այսինքն օրինակ՝ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ -ը $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ -ով ու $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ -ով արտահայտելու միակ ձևն է՝ $3 \cdot \mathbf{v}_1 + 4 \cdot \mathbf{v}_2$:

Օրինակ 4.4

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

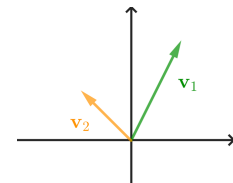
վեկտորները $\mathbb{R}^2$ -ի համար կազմում են հենք (կոչվում է $\mathbb{R}^2$ -ի *ստանդարտ հենք*): Այս երկու վեկտորները հաճախ նշանակում են նաև $\hat{i}$, $\hat{j}$ -ով:



Օրինակ 4.5

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

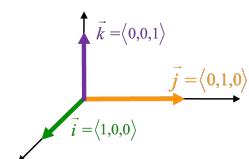
վեկտորները նույնպես $\mathbb{R}^2$ -ի համար կազմում են հենք, քանի որ դրանք գծորեն անկախ են (ընկած չեն նույն ուղղի վրա), և դրանց թաղանթը $\mathbb{R}^2$ -ն է:



Օրինակ 4.6

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

վեկտորները $\mathbb{R}^3$ -ի համար կազմում են հենք ($\mathbb{R}^3$ -ի *ստանդարտ հենք*), նշանակվում են նաև $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:





Նաթգ. Քանի՞ հենք ունի $\mathbb{R}^2$ տարածությունը: Իսկ $\mathbb{R}^3$ -ը՞:

չափից դուրս շար

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

վեկտորները $\mathbb{R}^2$ -ի հենք չեն, քանի որ դրանք գծորեն կախված են:

չափից դուրս քիչ

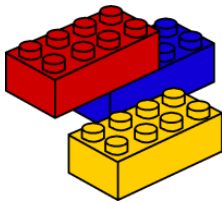
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

վեկտորները $\mathbb{R}^3$ -ի հենք չեն, քանի որ դրանց թաղանթն ամբողջ $\mathbb{R}^3$ -ը չէ (այլ ինչ-որ մի հարթություն):

չափից դուրս անկապ

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

վեկտորները $\mathbb{R}^2$ -ի հենք չեն, քանի որ դրանք ոչ գծորեն անկախ են, ոչ էլ դրանց թաղանթն է $\mathbb{R}^2$ -ը:



հենքի վեկտորները մեր լեզուներն են, որոնցով կառուցում ենք տարածությունը

Ինչպես նկատում ենք, ամեն գծային տարածություն ունի բազմաթիվ տարբեր հենքեր (այլ ոչ թե միայն մեկը), բայց այդ բոլոր հենքերը բաղկացած են *միևնույն թվով վեկտորներից*: Այդ թիվը կոչվում է տարածության *չափողականություն*:

Մահմանում 4.4 V գծային տարածության հենքերից յուրաքանչյուրում եղած վեկտորների թիվը կանխանենք V -ի *չափողականություն* և կնշանակենք $\dim V$ -ով:

Եթե օրինակ $\mathbb{R}^2$ -ում վերցնեք նույն ուղղի վրա չընկած երկու վեկտոր (կամ $\mathbb{R}^3$ -ում նույն հարթության մեջ չընկած երեք վեկտոր), ապա ինչ վեկտորներ էլ վերցնեք, դրանք կկազմեն հենք: Ավելի ընդհանուր՝ $\mathbb{R}^n$ -ում ցանկացած n հար գծորեն անկախ վեկտոր կազմում են $\mathbb{R}^n$ -ի հենք, հետևաբար՝

- $\mathbb{R}^1$ -ի չափողականությունը 1 է
- $\mathbb{R}^2$ -ի չափողականությունը 2 է
- $\mathbb{R}^3$ -ի չափողականությունը 3 է
- ...
- $\mathbb{R}^n$ -ի չափողականությունը n է
- ցանկացած ուղղի չափողականություն 1 է
- ցանկացած հարթության չափողականություն 2 է
- և այլն

Երկրաչափորեն չափողականությունը ցույց է տալիս, թե որքան մեծ է տարածությունը, թե ամենաշարք քանի գծորեն անկախ վեկտորներ է կարելի վերցնել այդ տարածության մեջ:



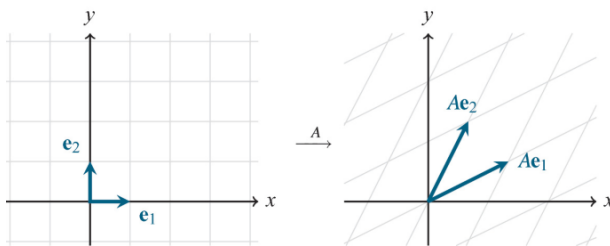
Նաթգ. Կարո՞ղ եք գտնել մատրիցներ, որոնք 2×2 չափանի մատրիցների տարածության մեջ կազմում են հենք: Որքա՞ն է $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ը:

4.4 Նենքի փոփոխություն

Վերադառնանք գծային ձևափոխություններին: Ընդհանուր առմամբ՝ յուրաքանչյուր մատրից փարածությունը որոշ չափով ձգում, սեղմում ու պտտում է փարբեր ուղղություններով: Բայց ինչպե՞ս մատրիցի փեսքից հասկանալ, թե այն կոնկրետ ինչ կերպով է ձևափոխում վեկտորները: Նարցի պատասխանը գրնելու համար դիմենք փարածության հենքի գաղափարին:

Ենթադրենք ունենք հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Տեսնենք, թե այն ո՞ր է փանում սրանդարտ հենքի $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ վեկտորները:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Նկատեցի՞ք. մատրիցը հենքի e_1 , e_2 վեկտորները ձևափոխելով փարավ դեպի *իր իսկ սյունները*՝

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto A\text{-ի 1-ին սյունը}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto A\text{-ի 2-րդ սյունը}$$

Ներկաբար եթե վերցնենք որևէ կամայական $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ վեկտոր՝

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓ ↓ ↓

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

այն կգնա դեպի նույն գործակիցներով, բայց արդեն e_1 , e_2 -ի փոխարեն՝ A -ի առաջին ու երկրորդ սյուններով վեկտորին:

Ավելի պարզերա՛վոր ասած՝ բոլոր վեկտորները կառուցված են հենքի վեկտորներից.

- երկու անգամ ձգենք e_1 -ը՝ ամեն վեկտոր հորիզոնական ուղղությամբ երկու անգամ կձգվի
- վեց անգամ սեղմենք e_2 -ը՝ ամեն վեկտոր ուղղաձիգ ուղղությամբ կսեղմվի
- շեղենք e_2 -ը փոքր-ինչ աջ՝ բոլոր վեկտորները համապարասխան չափով կշեղվեն դեպի աջ

և այդպես շարունակ: Ամեն ինչ կարծես կապված է հենքի վեկտորներին. մաթրիցը հենքի վեկտորները պարելով-ձգելով փանում է իր սյուներին, արդյունքում մյուս բոլոր վեկտորները նույն ձևով պարելով-ձգվում են:



Նաթց. A մաթրիցը e_1 -ը սեղմում է 2 անգամ, իսկ e_2 -ը փանում է $[0 \quad -3]$ վեկտորին: Ի՞նչ է լինում $[10 \quad 15]$ վեկտորի հետ:

2-չափ կամ 3-չափ դեպքերում

Մաթրիցների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս (կամ երբ ուզում եք պարզել, թե ուր է գնում այս կամ այն վեկտորը) օգտակար է նայել մաթրիցի սյուներին, մտքում պարելով, թե ինչպես են e_1 և e_2 վեկտորները շարժվում դեպի մաթրիցի 1-ին ու 2-րդ սյուները, և այդպիսով մտքավոր (ոչ շարժվող) պարելագում կազմել, թե ուր է գնում Ձեր ուզած վեկտորը:

ասել է թե՛ A -ի սյուները $\mathbb{R}^n$ -ի հենք են

Ամփոփելով՝ արձանագրենք, որ եթե $n \times n$ չափանի A մաթրիցի սյուները/սյուները գծորեն անկախ են, ապա այն կիրառելիս կարծես հին՝ $e_1, \dots, e_n$ հենքը փոխարինվում է նոր հենքով՝ մաթրիցի սյուներով:

գծորեն անկախ սյուների և սյուների թիվը համընկնում է

Սահմանում 4.5 A մաթրիցի գծորեն անկախ սյուների/սյուների թիվը կոչվում է A մաթրիցի **աստիճան**:

4.5 Սեփական արժեք և վեկտոր

Երբեմն դժվար է առանց հաշվարկների ու գործիքների պարելագման, թե ինչպես է տրված գծային ձևափոխությունը փոխում այս կամ այն վեկտորը, հարկապես եթե ձևափոխությունը կ'պարտում, կ'սեղմում, կ'ձգում է տարածությունը տարբեր ուղղություններով:

Օրինակ՝ նախորդ բաժնից

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

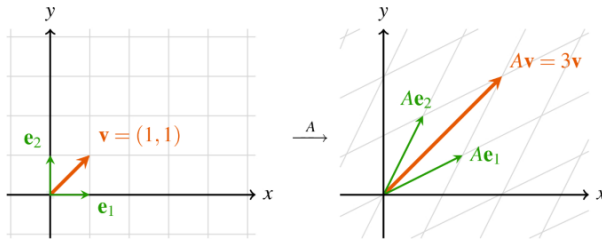
պարելագրեք՝ ասես x -երի ու y -ների առանցքները մկրատի պոչեր են

գծային ձևափոխությունը հենքի վեկտորները մի փոքր ձգում է և պարտում՝ e_1 -ը ժամսլաքի ուղղությամբ, e_2 -ը՝ ժամսլաքին հակառակ: Արդյունքում x -երի և y -երի առանցքները որոշ չափով ձգվում են և մտքենում իրար. դրանց կազմած անկյունը փոքրանում է:

Արդյունքում ո՞ր է գնում, ասենք, $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ վեկտորը՝

$$A \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A -ն այն և պարզում է, և ձգում փարբեր ուղղություններով, արդյունքում դժվար է առանց հաշվելու միանգամից կռահել, թե A -ն կիրառելիս որտեղ է այն գնում:



v -ն մկրափի «կիսորդն» է

Մինչդեռ փոխարենը, եթե A -ն ընդամենը որևէ ֆիքսված չափով ձգեր կամ սեղմեր վեկտորը (ասենք՝ 3 անգամ ձգեր), դա պարկերացնելը շարժվելի հեշտ կլիներ: Վերցնենք օրինակ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ վեկտորը՝

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3v$$

Օ՛, հրաշք. սրացանք նույն v վեկտորը՝ 3 անգամ ձգած, ու ոչ մի պարույր կամ շրջում:



Նարց. Ինչպե՞ս կփոխվի v -ի կրկնապարհկը: Իսկ $-5v$ -ն:

Առաջին վեկտորի դեպքում դժվար էր պարկերացնել, թե այն ուր է գնում, իսկ այ v -ի դեպքում ամեն բան ավելի հեշտ է, քանի որ ձևափոխության արդյունքում այն չի պարփում, այլ մնալով նույն ուղղի վրա՝ պարզապես մի քանի անգամ ձգվում է կամ սեղմվում:

Այդպիսի վեկտորների հետ աշխատելը, իհարկե, շարժվելի հեշտ է ու նախընտրելի: Դրանք ունեն հարուկ անուն և կոչվում են գծային ձևափոխության/մարիցի սեփական վեկտորներ, իսկ դրանց ձգման/սեղմման գործակիցները՝ սեփական արժեքներ:

3-ը A -ի սեփական արժեք է

Սահմանում 4.6 Եթե որևէ λ թվի և v ոչ զրոյական վեկտորի համար

$$Av = \lambda v$$

ապա կասենք, որ

- λ -ն A -ի **սեփական արժեք** է
- v -ն λ -ին համապատասխան **սեփական վեկտոր** է

անգլերեն՝ *eigenvalue* և *eigenvector*

Օրինակ 4.8

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

գծային ձևափոխությունը $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ վեկտորը ձգում է 4 անգամ՝

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \end{bmatrix} = 4v$$

հեքսաբար $\lambda = 4$ -ը A -ի սեփական արժեք է, իսկ $\mathbf{v}$ -ն՝ սեփական վեկտոր:

Եթե $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, ապա $\mathbf{v}$ -ի փոխարեն փոխարինելով $3\mathbf{v}$, $-3\mathbf{v}$, և այլն՝ ստանում ենք, որ $\mathbf{v}$ -ի հեքս նույն ուղղի վրա ընկած ցանկացած վեկտոր նույնպես A -ի սեփական վեկտոր է (λ սեփական արժեքին համապատասխան):

նույն արժեքին համապատասխան

Թեորեմ 4.3 Եթե $\mathbf{v}$ -ն A -ի սեփական վեկտոր է, ապա $c\mathbf{v}$ -ն ևս A -ի սեփական վեկտոր է (ցանկացած $c \neq 0$ թվի համար):

Ուրեմն եթե λ թիվը A -ի սեփական արժեք է, ապա A -ն ոչ թե ունի մեկ-երկու վեկտոր, այլ ամբողջական *ուղղություններ*, որոնց վրա կիրառելիս դրանք պարզապես λ անգամ ձգում է:



Տարբ. Կարող է $\mathbf{v}$ վեկտորը համապատասխանել երկու տարբեր λ_1 և λ_2 սեփական արժեքների:

անգլերեն՝ *eigenspace*

A -ի բոլոր սեփական արժեքների բազմությունը անվանում են A -ի *սպեկտր*, իսկ յուրաքանչյուր λ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորների բազմությունը՝ λ -ին համապատասխան *սեփական տարածություն* (նշանակում են E_λ):



Զգուշացե՛ք. $n \times n$ չափանի մատրիցը ամենաշատը կարող է ունենալ n սեփական արժեքներ, կարող է նաև ընդհանրապես չունենալ:



Տարբ. Կարող եք նկարագրել $\mathbb{R}^2$ -ի այնպիսի ձևափոխություն, որը սեփական արժեք չունի: Իսկ այնպիսին, որն ունի ուղիղ մեկը՝

Ինչպես մատրիցի հեք թվաբանական գործողություններ անելով գրենք նրա սեփական արժեքները: Եկեք պարզենք դա՝ առանց հաշվողական մասի վրա խորանալու: Ուզում ենք գրել այնպիսի λ և $\mathbf{v}$, որ $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$: Նշանակենք λ -ն x -ով և գրենք՝

$$A\mathbf{v} = x\mathbf{v} = x(I\mathbf{v}) = (xI)\mathbf{v}$$

ի՞նչ փեսք ունի xI մատրիցը

կամ որ նույնն է՝ $A\mathbf{v} - (xI)\mathbf{v} = (A - xI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

Եթե $(A - xI)$ մատրիցը ունենար հակադարձ, կգրեինք՝

$$\mathbf{v} = (A - xI)^{-1}\mathbf{0}$$

բայց ցանկացած մատրիցի և $\mathbf{0}$ -ի արտադրյալը հենց $\mathbf{0}$ է, ուրեմն կստացվեր $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, բայց չէ՞ որ պահանջել էինք, որ սեփական վեկտորը զրոյական չլինի: Ներկաբար $(A - xI)$ -ն հակադարձ չունի՝

$$\det(A - xI) = 0$$

Ահա այս հավասարման ձախ մասում գրվածը որոշիչի բանաձևով կրացենք, կստանանք x -ից կախված մի բազմանդամ (կոչվում է՝ A -ի *քնութագրիչ բազմանդամ*), և եթե գրենք դրա արմատները՝

ստացված թվերը կլինեն A -ի սեփական արժեքները: Խնդրի լուծման կոնկրետ օրինակ կարող եք տեսնել օրինակ՝ [այստեղ](#), սակայն ինչպես մեծ չափանի մատրիցների որոշիչի, այնպես էլ սեփական արժեքների դեպքում՝ ձեռքով դրանց հաշվելը երկար գործ է, ուստի մենք դրա վրա չենք կենտրոնանա:

Փոխարենը, հետևյալ գեղեցիկ հարկությունները կապ են հաստատում գծային ձևափոխության երեք փարբեր բնութագրիչների՝ սեփական արժեքների, որոշիչի և հետքի միջև.

Թեորեմ 4.4 *Քառակուսային մատրիցի որոշիչը հավասար է նրա սեփական արժեքների արտադրյալին.*

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

իսկ հետքը՝ սեփական արժեքների գումարին.

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

սիրուն է, չե՞

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Johnston], 126-129 (գծային թաղանթ), 131-135 (գծորեն անկախություն), 140-141 (հենք) էջերը
- դիպել 3b1b-ի [2-րդ](#) տեսադասը գծային հանրահաշվից
- կարդալ [Poole], 202-203 էջերը (չափողականություն)
- վերադառնալ [Johnston], 38-41 և 235-237 (մատրիցի սյունների և հենքի կապը), 285-286 (սեփական արժեքներ) էջերին
- ըստ ցանկության՝ [Poole], 255-259 էջերի օրինակներին
- դիպել 3b1b-ի [14-րդ](#) տեսադասը գծային հանրահաշվից
- տեսնել սեփական վեկտորները [սեփական աչքով](#)
- ըստ ցանկության՝ հետազոտել [սեփական արժեքներով](#) և [եզակի արժեքներով](#) մատրիցի վերլուծության մասին

լուծում

4.6 Խնդիրներ

Խնդիր 4.1 Լրացրեք բացակայող թվերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & * \\ -1 & * \end{bmatrix}$$

եթե հայտնի է, որ

- ա. ձևափոխությունը ձգում է $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ վեկտորը 2 անգամ
- բ. ձևափոխությունը հեռացնում է 2 է, իսկ որոշիչը՝ 3
- գ. 1-ն ու 5-ը ձևափոխության սեփական արժեքներ են

Խնդիր 4.2 Ամենաշարը ի՞նչ չափողականության ենթատարածություն է կարելի կառուցել այս վեկտորներով.

$$\begin{aligned} \text{ա. } \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{բ. } \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{գ. } \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \text{դ. } \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Խնդիր 4.3 Գտեք հետևյալ ձևափոխությունների սեփական արժեքներն ու վեկտորները.

$$\begin{aligned} \text{ա. } A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{բ. } B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{գ. } C &= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{դ. } D &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Կարող եք օգտվել մեր իմացած ցանկացած մեթոդից (բնութագրիչ բազմանդամ, հեռք և որոշիչ, սյունների ու հենքի կապը), բայց փորձեք նաև տեսողաբար պարկերացնել խնդիրը:

Խնդիր 4.4 Ենթադրենք ունենք

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}$$

գծային ձևափոխությունը, որպես $a_1, \dots, a_5$ -ը որևէ ֆիքսված դրական թվեր են:

- ա. որն է $\mathbb{R}^5$ տարածության սրանդարտ հենքը

- բ. ո՞ր է քանոն A -ն $\mathbb{R}^5$ -ի սքանդարտ հենքի վեկտորներին
 գ. ի՞նչ եք կարծում, որքա՞ն է A -ի որոշիչը
 դ. կարո՞ղ եք գտնել A -ի սեփական արժեքներն ու վեկտորները

Խնդիր 4.5 Ֆեյսբուքում հանդիպելով հեպեյալ խնդրին՝

*2 խնձորն ու 3 տանձը միասին արժեն 1100 դրամ, իսկ
 1 խնձորն ու 4 տանձը՝ 700 դրամ: Միայն 140-ից բարձր
 IQ ունեցող մարդիկ կարող են գտնել խնձորի ու տանձի
 գինը:*

հասկանում եք, որ եկել է պահը՝ վերջապես կիրառելու Ձեր սովորածը:

- ա. անհայտները նշանակելով x_1 , x_2 -ով՝ գրեք խնդիրը համակարգի
 տեսքով
 բ. կարո՞ղ եք պայմանները արտահայտել

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}$$

տեսքով, կարճ՝ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- գ. օգտվելով հակադարձի բանաձևից՝ փորձեք գտնել $\mathbf{x}$ -ը

Այն, ինչ սրացաք, կոչվում է *գծային հավասարումների համակարգ*:

5.1 Էքսպրեսմոմի խնդիր

Պարկերացրե՛ք՝ վեկտորների փոխարեն ունեք խանութ, և որոշակի հաշվարկների արդյունքում սրացել եք, որ խանութի եկամուտը ծիրանի գնից կախված է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(x) = 20\sqrt{x} - 3x^3$$

որպես x -ը 1 կգ ծիրանի գինն է:

Ինչպես ցանկացած գործարար, Դուք ուզում եք հնարավորինս մեծացնել Ձեր եկամուտը, ուստի Ձեզ հեղափոխություն է հետևյալ հարցը.

— Որքա՞ն պետք է լինի x -ը, որպեսզի $f(x)$ -ը լինի մաքսիմալ՝ հնարավորինս մեծ



Նախ. *Desmos* կամ *GeoGebra* ծրագրով գծեք $f(x)$ -ի գրաֆիկը: Ո՞րն է ծիրանի օպտիմալ գինը:

Իրական կյանքում, իհարկե, իրավիճակն ավելի բարդ է, քանի որ ամեն խանութ ծիրանից բացի ուրիշ ապրանքներ էլ է վաճառում: Եկամուտը կարող է կախված լինել մի քանի փոփոխականներից, օրինակ՝

$$f(x, y, z, t) = 3xy^2 - y \log t - (1 - y) \log(1 - t) + \frac{z^3}{t}$$

որպես x, y, z, t -ի փոփոխական պահին ունեցած արժեքներն են

$$x = 4, \quad y = 0.4, \quad z = 0.8, \quad t = 55$$

և անհրաժեշտ է որոշել՝ մեծացնել, թե՞ փոքրացնել այդ արժեքները (և որքանով):

Մեքենայական ուսուցման մեջ հաճախ նման անհայտները (պարամետրերը) ոչ թե մեկն են, այլ միլիոնից ավել, սակայն խնդիրը մնում է նույնը. ինչպե՞ս գտնել փոփոխական ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեքը:

Նմանափայ խնդիրները կոչվում են *Էքսպրեսմոմի խնդիրներ*, և մենք կսկսենք մեր քննարկումը այն դեպքից, երբ ունենք միայն մի փոփոխական պարամետր:

5.2 Նաջորդականություններ

Սկսենք հաջորդականություններից: *Նաջորդականություն* ասելով՝ նկատի կունենանք **անվերջ քանակով** թվերի՝ ֆիքսված հերթականությամբ գրված «շարք», «շարան»:

5.1 Էքսպրեսմոմի խնդիր	53
5.2 Նաջորդականություններ . .	53
5.3 Նաջորդականության սահման	55
5.4 Ֆունկցիայի սահման	57
5.5 Ածանցյալ	60
5.6 Ածանցյալի նշանը	64
5.7 Էքսպրեսմոմի խնդրի լուծումը	66
5.8 Խնդիրներ	70

հաճախ այս խնդիրը անհնար է լուծել. փոխարենը որոնում են ոչ թե *ամենամեծ*, այլ *համեմատաբար մեծ* արժեք

Օրինակ 5.1 Սրանք հաջորդականություններ են՝

- 1, 2, 3, 4, 5, ...
- 1, -1, 1, -1, 1, ...
- 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, ...
- 6, 6, 6, 6, 6, ...

իսկ սա՝ ոչ.

- 1, 2, 3, 4

Ինչ-որ իմաստով՝ հաջորդականությունը մեր իմացած վեկտորն է, բայց անվերջ երկարությամբ: Ինչպես վեկտորները նշանակում ենք՝

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

իսկ նրա բաղադրիչները՝ նույն փառ + համարակալումով, այնպես էլ ամեն հաջորդականության կարող ենք փալ ինչ-որ անուն, ասենք՝ a , իսկ դրա *անդամները* համարակալել՝

$$a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

Քանի որ հաջորդականության բոլոր անդամները հերթով թվարկելն անհնար է (անվերջ հատ են), սովորաբար հարմարության համար պարզապես կգրենք, թե ի՞նչ բանաձևով է որոշվում դրա n -րդ ընդհանուր անդամը՝ a_n -ը:

Օրինակ՝ եթե ուզում ենք խոսել բնական թվերի քառակուսիներից բաղկացած հաջորդականության (=անվերջ չափանի վեկտորի) մասին, կգրենք՝

$$a_n = n^2 \quad \text{կամ} \quad \{a_n\} = \{n^2\}$$

և նկատի կունենանք, որ

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad \dots$$

այսինքն՝ $a = (1, 4, 9, \dots)$:



Զգուշացե՛ք. Բազմություններում փարերի հերթականությունը կարևոր չէ, մինչդեռ հաջորդականությունների դեպքում շար կարևոր է. $(1, 2, 3, 4, \dots) \neq (2, 1, 3, 4, \dots)$:

Վեկտորների նմանությամբ կսահմանենք նաև հաջորդականությունների գումարը, փարբերությունը և թվով բազմապատկումը՝

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, \dots) \pm (b_1, b_2, b_3, \dots) &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \dots) \\ c \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots) &= (ca_1, ca_2, ca_3, \dots) \end{aligned}$$

Եթե բոլոր հաջորդականությունների բազմությունը նշանակենք c -ով, ապա c -ն կլինի գծային փարածություն (ինչպես վեկտորների բազմու-

թյունները): Ի փարբերություն վեկորների՝ կսահմանենք նաև հաջորդականությունների անդամ առ անդամ բազմապատկում և բաժանում՝

$$ab = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots)$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots \right) \quad \text{եթե } b_1, b_2, \dots \neq 0$$



Նաթ. ԲՆՆ հաջորդականությամբ բազմապատկենք $(1, 2, 3, 4, \dots)$ հաջորդականությունը, որպեսզի այն դառնա $(0, 0, 3, 0, 0, \dots)$:

5.3 Հաջորդականության սահման

Կան հաջորդականությունների շարք հեքաքրքիր օրինակներ: Վերցնենք, օրինակ, հետևյալ հաջորդականությունը՝ $a_n = \frac{1}{n}$, այսինքն՝

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

Նկատենք, որ որքան n -ը մեծանում է, այնքան հաջորդականությունը փոքրանում ու փոքրանում է:

Կա՛ այնպիսի թիվ, որին $\{a_n\}$ -ը գնալով մոտենում է. այո՛, որքան n -ը մեծանում է՝ $n \rightarrow \infty$, այնքան a_n -ը մոտենում է զրոյի՝ $a_n \rightarrow 0$: Այս դեպքում 0-ն կանվանենք $\{a_n\}$ -ի **սահման**:

Ինչ-որ պահի a_n -ը դառնում է 0. ոչ, հեքաքրքիր է, սակայն որքան էլ հաջորդականության անդամները ձգվում են 0-ին, միևնույն է՝ չեն հասնում, միշտ մնում են զրոյից մեծ:

Սահմանում 5.1 Կասենք, որ $\{a_n\}$ հաջորդականությունը **ձգվում** կամ **գոյգամիկում** է L թվին (կամ L -ը $\{a_n\}$ -ի **սահմանն** է), եթե n -ի բավարար մեծ արժեքների դեպքում բոլոր a_n անդամները որքան ասես մոտր են լինում L -ին:

Դա կգրառենք այսպես՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

կամ այսպես՝

$$a_n \rightarrow L \quad (\text{երբ } n \rightarrow \infty)$$

անգլերեն՝ *limit*, լատիներեն՝ *limes*

Ի՞նչ նկատի ունենք, երբ ասում ենք՝ բնական թվերը անվերջ են: Նկատի ունենք, որ ինչ թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունի այնպիսի բնական թիվ, որը դրանից ավելի մեծ է: Նույն ձևով, երբ ասում ենք՝ $a_n \rightarrow L$, նկատի ունենք՝ ինչքան փոքր թիվ էլ վերցնենք (ասենք՝ 0.0001) և հարցնենք՝ արդյո՞ք ինչ-որ պահի հաջորդականության բոլոր անդամները գտնվելու են L -ից ամենաշատը 0.0001 հեռավորության վրա (այսինքն՝ շարք մոտիկ), պարասխանը լինելու է՝ այո, **այսինչ պահից սկսած՝ բոլոր a_n -երը լինելու են L -ին 0.0001 չափով մոտ:**

Ուստի կարող ենք $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ երևույթը ձևակերպել նաև այսպես՝

այսինքն՝ կա ինչ-որ N համար (ասենք՝ $N = 2000$), որ դրանից հետո եկող բոլոր n -երի դեպքում՝ $|a_n - L| < 0.0001$

- ինչ $\varepsilon > 0$ թիվ էլ վերցնես
- գոյություն ունի բավարար մեծ N թիվ այնպես, որ
- $|a_n - L| < \varepsilon$ բոլոր $n = N, N + 1, N + 2, \dots$ անդամների համար

Նման ձևով կսահմանենք, որ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, եթե a_n -ը ցանկացած թվից մեծ է դառնում որոշ թվով քայլերից հետո:

Սահմանում 5.2 Եթե $\{a_n\}$ -ն ունի սահման, և այդ սահմանը վերջավոր է, ապա կասենք, որ այն **զուգամեար** է, հակառակ դեպքում՝ **դադամեար** է:

Օրինակ 5.2

- $1, 2, 3, 4, 5, \dots \rightarrow +\infty$
- $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ սահման չունի
- $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, \dots \rightarrow +\infty$
- $6, 6, 6, 6, 6, \dots \rightarrow 6$



Զգուշացե՛ք. Հաջորդականությունը կարող է ինչ-որ պահից սկսած հավասար լինել կամ չլինել իր սահմանին:

Հաճախ կարելի է հաջորդականության բանաձևից որոշել նրա սահմանը.

- $n^k \rightarrow \infty$ ցանկացած $k > 0$ թվի համար
- $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0$ ցանկացած $k > 0$ թվի համար
- $c^n \rightarrow +\infty$, եթե $c > 1$, բայց $c^n \rightarrow 0$, եթե $|c| < 1$
- եթե ինչ-որ պահից սկսած հաջորդականության բոլոր անդամները հավասար են նույն թվին, սահմանը այդ թիվն է

Ի՞նչ կլինի, եթե $|c| = 1$



Հարց. Կմեն ուրբաթ 2եր փնօրենը կանչում է և ուրախությամբ հայտնում, որ 2եր աշխատավարձը բարձրացվում է 0.99 անգամ: Քանի՞ շաբաթից կսկսեք զգալ, որ մի բան այն չէ:

Օրինակ 5.3

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.3n = \infty$ (դադամեար է)

Նկատենք նաև, որ երկու զուգամեար հաջորդականություններ գումարելիս, բազմապատկելիս, և այլ գործողություններ անելիս դրանց սահմանները պահպանվում են, այսինքն՝

Թեորեմ 5.1

1. Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ և $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \quad (\text{եթե } M \neq 0)$$

2. Եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ապա ցանկացած c թվի համար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot L$$

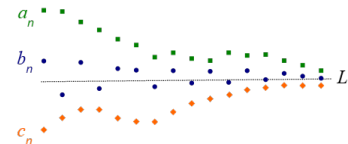
3. Եթե ցանկացած n -ի համար

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\text{և } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L, \text{ ապա } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L:$$

այսպես L -ն ու M -ը վերջավոր թվեր են

b -ն սեղմված է a -ի ու c -ի արանքում, որոնք ձգքում են նույն L -ին



Նաթ. Ենթադրենք $a_n \rightarrow 4$: Ո՞ր կձգքի հաջորդականությունը, եթե հեռացնենք նրա առաջին 3 անդամները:

Քանի որ ինչ-որ սահմանի ձգքելու համար անհրաժեշտ է, որ հաջորդականության անդամները սկսած ինչ-որ պահից մոտ լինեն այդ սահմանին, նշանակում է այդ սահմանը կախված չէ հաջորդականության առաջին 3, 100 կամ 1000 անդամներից: Եթե ի վերջո հաջորդականությունը մոտենում է ինչ-որ թվի, ապա սկզբի մի քանի անդամներ փոխելիս, ջնջելիս կամ ավելացնելիս այդ գուգամիությունը չի փոխվում:

թեև, իհարկե, ամեն բան կարող է փոխվել, եթե ջնջեք կամ ավելացնեք անվերջ թվով անդամներ

5.4 Ֆունկցիայի սահման



Նաթ. Ի՞նչ էք կարծում, ի՞նչ է նշանակում $\lim_{x \rightarrow 0} (2+x)^3$ **արտահայտությունը:**

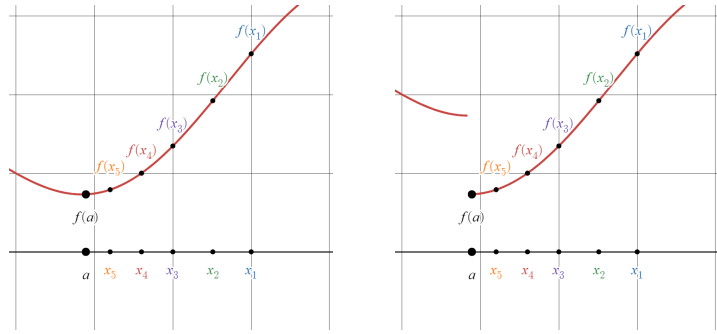
Ինչպես հաջորդականությունների համար n -ը ձգքեցնելով անվերջի և մոտենալով ինչ-որ թվի՝ այն անվանեցինք սահման, այդպես էլ ներմուծենք սահմանի գաղափարը ֆունկցիաների համար:

Վերցնենք օրինակ՝

$$f(x) = (2+x)^3$$

Ֆունկցիան: Ո՞ր մեծությունը կուգեինք անվանել $f(x)$ -ի սահման $x = 0$ կերպով: Ինքուրիպիցիան մեզ հուշում է, որ եթե գծեինք $f(x)$ -ի գրաֆիկը և նայեինք, թե x -ը 0-ին մոտենալիս ի՞նչ թվի է մոտենում $f(x)$ -ի արժեքը, հենց այդ թիվն էլ պետք է որ համարել f -ի սահմանը 0 կերպով:

ձախ նկարի ֆունկցիան a կետում ունի սահման, իսկ աջինը՝ չունի, քանի որ եթե x_n -երը վերցնենք a -ից ձախ, $f(x_n)$ -ը կմոտենար մի ուրիշ թվի



Այլ կերպ ասած՝ եթե 0 -ի ձգտող ինչ $\{x_n\}$ հաջորդականություն էլ վերցնենք ու տեղադրենք f -ի մեջ, և արդյունքում ստացվող $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots)$ հաջորդականությունը ձգտի ինչ-որ թվի, սահմանը կլինի այդ թիվը: Ուրեմն սահմաններ $a \in \mathbb{R}$ կետում f -ի սահմանը.

Սահմանում 5.3 Եթե *ցանկացած* $x_n \rightarrow a$ *հաջորդականություն* *համար*

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

հաջորդականությունը ձգտում է միևնույն L թվին, ապա L -ը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման a կետում՝

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Ինչո՞ւ ենք նշում «ցանկացած $x_n \rightarrow a$ -ի համար»: Բանն այն է, որ երբեմն որոշ ֆունկցիաներ իրենց այնքան էլ լավ չեն պահում. երբ a -ին մոտենում ենք աջից, ստանում ենք ինչ-որ սահման, բայց երբ մոտենում ենք ձախից՝ ստանում ենք մեկ այլ սահման: Նման դեպքերում կասենք, որ ֆունկցիան a կետում սահման չունի:



Զգուշացե՛ք. Ֆունկցիան կարող է մի կետում ունենալ սահման, մի ուրիշ կետում՝ ոչ:

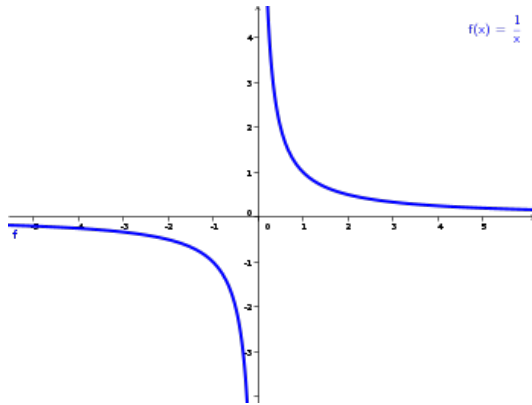
Ինչքան էլ փոքր ε ասես՝ եթե x -ը a -ին բավարար մոտ լինի, ապա $f(x)$ -ը մոտ կլինի L -ին (ոչ հեռու, քան ε չափով)

Կրկին ինչպես *հաջորդականությունների դեպքում*, սահմանը կարող ենք սահմանել նաև այսպես. կասենք, որ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ եթե $0 < |x - a| < \delta$, ապա $|f(x) - L| < \varepsilon$:

Օրինակ 5.4

- $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x)^3 = 2^3 = 8$
- $\lim_{x \rightarrow 4} (2 + x)^3 = 6^3 = 216$
- $\lim_{x \rightarrow -3} (2 + x)^3 = (-1)^3 = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 2.5} 4x - 3 = 4 \cdot 2.5 - 3 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$

Ինչպես տեսնում ենք, հաճախ փրված կետում սահմանը հաշվելու համար պետք է ընդամենը այդ կետը տեղադրել ֆունկցիայի մեջ և վերջ:



Օրինակ՝ $f(x) = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից երևում է, որ երբ x -ը մոտեցնում ենք 3 կետին, ֆունկցիայի ընդունած արժեքները մոտենում են $\frac{1}{3}$ -ին, հետևաբար՝ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$:

Իսկ ի՞նչ կարող ենք ասել 0 կետում սահմանի մասին: Եթե x -ը 0 կետին մոտեցնենք աջից, $f(x)$ -ի արժեքները աճելով կձգվեն $+\infty$ -ի, մինչդեռ եթե ձախից մոտենանք՝ կձգվեն $-\infty$ -ի: Սա նշանակում է, որ ֆունկցիան 0 կետում սահման չունի: Ավելին, եթե $x = 3$ -ում ֆունկցիան որոշված է՝ ունի արժեք, ապա $x = 0$ -ում ֆունկցիան արժեք էլ չունի՝ որոշված չէ: Նման դեպքում կասենք, որ f -ը 0 կետում *խզվող* է, իսկ մնացած կետերում՝ *անընդհատ*:

f -ը կարծես երկու իրար հետ կապ չունեցող ֆունկցիա լինի

Սահմանում 5.4 Կասենք, որ f ֆունկցիան *անընդհատ* է a կետում, եթե

1. f -ը a -ում որոշված է
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ սահմանը գոյություն ունի
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ունի արժեք

ունի սահման

արժեք = սահման

Պարկերավոր ասած՝ Կոլյա կետում ֆունկցիան անընդհատ է, եթե դրա գրաֆիկը հնարավոր է գծել՝ առանց գրիչը թողնելու:



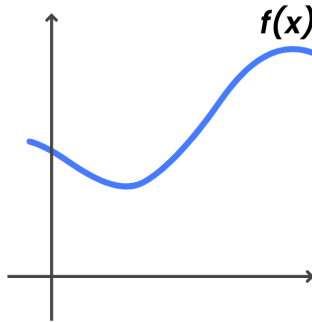
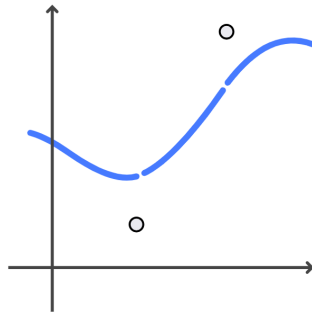
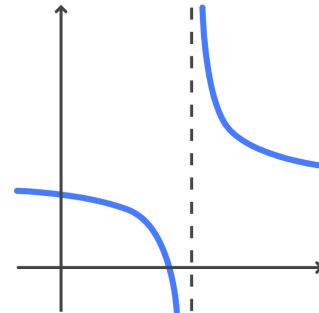
Զգուշացե՛ք. Ֆունկցիան կարող է մի կետում անընդհատ լինել, մի ուրիշ կետում՝ խզվել:

Անընդհատությունը շատ օգտակար հատկություն է, և գործնականում հանդիպող ֆունկցիաները, բարեբախտաբար, մեծ մասամբ անընդհատ են $(-\infty, \infty)$ ընկած բոլոր կետերում (ողջ $\mathbb{R}$ -ում), կամ մեկ-երկու կետից բացի մնացած բոլոր կետերում, կամ էլ՝ բոլոր այն կետերում, որտեղ որոշված են:

օրինակ՝ $\sqrt{x}$ -ը կամ $\frac{1}{x}$ -ը, որոնք ոչ բոլոր կետերում են որոշված

Նշենք, որ եթե որևէ a կետում f -ն ու g -ն անընդհատ են, ապա դրանք գումարելիս, հանելիս, բազմապատկելիս, բաժանելիս կամ թվով բազմապատկելիս սրացվող ֆունկցիաները՝

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ (եթե $g(a) \neq 0$)

անընդհատ
(բոլոր կետերում որոշված)խզվող
(բոլոր կետերում որոշված)խզվող
(ոչ բոլոր կետերում որոշված)

○ $c f$ (c -ն ցանկացած թիվ է)

նույնպես անընդհատ են այդ կետում:



Նաթգ. *Կռահո՞ւմ եք, թե ինչպիսի փառաժողովրդներ է կազմում a կետում անընդհատ բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը:*

Եթե ֆունկցիան բոլոր կետերում անընդհատ է (կամ գոնե՝ բոլոր այն կետերում, որոնցում որոշված է), ապա այն կարճ կասենք ուղղակի **անընդհատ ֆունկցիա**: Անընդհատ ֆունկցիաներ են, օրինակ՝

- հասարարում ֆունկցիաները՝ $3, -8$
- գծային ֆունկցիաները՝ $3x + 4, 5x, y - x$
- առհասարակ բոլոր բազմանդամները՝ $x^2 + 7x - 1, xy - y^4 + z$
- արմար պարունակող ֆունկցիաները՝ $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}$
- ցուցային ու լոգարիթմական ֆունկցիաները՝ $2^x, e^{3x}, \ln x$
- եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն ու դրանց հակադարձները՝ $\cos(3x), \arcsin x$

որոշները ոչ բոլոր կետերում են որոշված

և այլն: Խզվող ֆունկցիաները հեշտ է պարզել՝ նայելով դրանց գրաֆիկին: Եթե ինչ-որ կետի մոտենալիս ֆունկցիայի արժեքը փարբեր կողմերից փարբեր թվերի է ձգվում, կամ ասենք՝ գրաֆիկը մի որևէ կետում կտրվում է, ապա ֆունկցիան խզվող է:

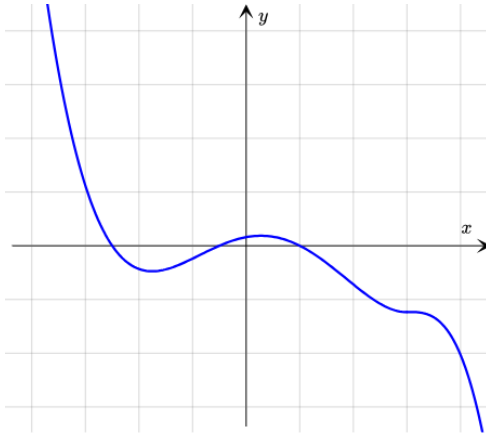
5.5 Ածանցյալ

Պարկերացրեք՝ փոքրացել-դարձել եք կետ և ֆունկցիայի գրաֆիկի վրայով կարուսելի նման սահում եք վերև ու ներքև: Ձեր ճանապարհը ֆունկցիայի գրաֆիկն է. ինչ-որ ժամանակ դրանով կբարձրանաք դեպի վեր, հետո կսկսեք իջնել, հետո նորից բարձրանալ, երբեմն՝ ավելի մեծ արագությամբ կընթանաք, երբեմն՝ շարժումը կդանդաղի:

Բայց փաստացի՝ հիմա Դուք կետ չեք: Գրաֆիկով մեկ սահել չեք կարող, փոխարենը պետք է բավարարվեք ֆունկցիայի բանաձևով: Ինչպե՞ն կարող ենք բանաձևից ելնելով՝ պարզել, թե երբ ու ինչպես են րեղի ունենում ֆունկցիայի այս վայրիվերումները:

Նախ ֆիքսենք, թե գրաֆիկի որ կետում եք գտնվում, և փորձենք հաշվել այդ կետում Ձեր ունեցած արագությունը: Ենթադրենք՝ գտնվում ենք $x = a$ կետում:

ֆունկցիայի ընդունած արժեքը՝ $f(a)$



Նաթգ. Ինչպե՞ն կհաշվենք, թե րնից իսանութ գնալու ճանապարհին որքա՞ն է Ձեր մոտրավոր արագությունը:

Եթե այժմ a կետից մի փոքր շարժվենք դեպի աջ կամ ձախ, ասենք՝ շարձինք h չափով, ապա կհայտնվենք $f(a+h)$ -ում, այսինքն՝ h չափով քայլ կարարելու դեպքում կբարձրանանք/կիջենք

$$f(a+h) - f(a)$$

չափով: Եթե հիմա այս փոփոխության չափը բաժանենք մեր կարարած քայլի վրա՝

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

կսրանանք «միջին» կամ «միավոր» փոփոխության չափը (a կետի շուրջն այս ու այն կողմ գնալիս):

Վերջապես, քանի որ ուզում ենք չափել հենց a կետում մեր շարժման արագությունը, ապա պետք է կենտրոնանանք միայն a կետին շարժման շրջակայքի վրա: Այլ կերպ ասած՝ սրիպենք, որ h -ը լինի շարժման փոքր՝

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ինչ թիվ որ արդյունքում սրանանք, հենց դա էլ ցույց կրա a -ում մեր (այսինքն՝ f -ի գրաֆիկի աճել/նվազելու) արագությունը: Այդ թիվը կոչվում է a կետում f -ի *աժանցյալ*:

Եթե ձախ ենք շարժվում, h -ը կվերցնենք բացասական

a -ից հեռու f -ի արագությունը կարող է ավելի մեծ/փոքր լինել, բայց դա a -ում արագության վրա չպետք է ազդի

Մահմանում 5.5 Եթե հետևյալ սահմանը գոյություն ունի և անվերջ չէ՝

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ապա այն կնշանակենք $f'(a)$ -ով կամ $\frac{df}{dx}(a)$ -ով և կանվանենք f ֆունկցիայի *աժանցյալ* a կետում:

$$\text{կամ որ նույնն է՝ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Եթե f -ն a -ում ունի աժանցյալ, ապա կասենք, որ այն *աժանցելի* կամ *դիֆերենցելի* է a կետում:

Օրինակ 5.5 Դիտարկենք $f(x) = x^2$ ֆունկցիան: Որևէ x կետում դրա ածանցյալը հաշվելու համար գրենք՝

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

Ուրեմն՝ ցանկացած x կետում f -ի ածանցյալն է՝ $f'(x) = 2x$:

որքան զգայուն է ֆունկցիան իր արգումենտի փոփոխության նկատմամբ

Եվս մեկ անգամ արձանագրենք, որ ֆունկցիայի ածանցյալը փոխադրում ցույց է տալիս այդ ֆունկցիայի *փոփոխման արագությունը*՝ որքան է փոխվում ֆունկցիայի արժեքը, երբ նրա արգումենտը մի փոքր փոփոխում ենք: Իհարկե, ֆունկցիան կարող է երբեմն արագանալ, երբեմն՝ դանդաղել, հետևաբար՝



Զգուշացե՛ք. Ածանցյալը տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ. $f'(x)$ -ը ոչ թե ֆիքսված թիվ է, այլ x -ից կախված ֆունկցիա:

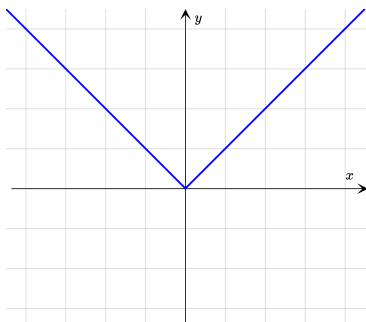


Նաթ. Որքան x -ը գնում է աջ, այնքան $f(x) = x^2$ -ն ածանցյալը մեծանում է: f -ի գրաֆիկին նայելով՝ ինչպե՞ս կմեկնաբանենք դա:

Նշենք, որ եթե անընդհատությունը լավ հարկություն է, ապա դիֆերենցելիությունը էլ ավելի լավ հարկություն է: Մասնավորապես,

Թեորեմ 5.2 Եթե ֆունկցիան որևէ կետում դիֆերենցելի է, ապա նաև անընդհատ է այդ կետում:

Բայց հակառակը ճիշտ չէ. կան ֆունկցիաներ, որոնք անընդհատ են, բայց դիֆերենցելի չեն:



կարծես երկու ֆունկցիաներ 0 կետում կպցրած լինեն միմյանց, բայց ոչ այնքան սահուն ձևով

Օրինակ 5.6 $f(x) = |x|$ ֆունկցիան անընդհատ է, նրա ածանցյալը դրական x -երում 1 է՝

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

բացասական կետերում՝ -1՝

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)-x}{h} = -1$$

Իսկ այ $x = 0$ կետում ֆունկցիան ածանցյալ չունի, քանի որ եթե 0-ին մոտենանք

- աջից՝ $h > 0$, կունենանք՝ $\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$
- ձախից՝ $h < 0$, կունենանք՝ $\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$

Ընդհանուր դեպքում h -ը 0-ի ձգտելիս սահման չկա, հետևաբար f -ը 0-ում դիֆերենցելի չէ:

Ինչպես կարող եք ենթադրել՝ նայելով գրաֆիկին, ածանցյալ չունենալու պարճառը 0 կերպում ուղղության շար կտրուկ փոփոխությունն է:



Նաթգ. Որքա՞ն կլինի $f(x) = 14$ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը:

Նման եղանակով կարող ենք հաշվել մի քանի հաճախ հանդիպող ֆունկցիաների ածանցյալները.

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

հաստատունի ածանցյալը = 0

Իսկ չորրորդ կանոնից մասնավորապես հետևում է, որ

- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



Նաթգ. Ի՞նչ եք կարծում, որքա՞ն է $e^x + \cos x$ -ի ածանցյալը:

Արդեն հայտնի ֆունկցիաներից բաղկացած այլ ֆունկցիաների ածանցյալը հաշվելիս օգտակար են հետևյալ բանաձևերը.

- $(cf)' = c \cdot f'$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f - g)' = f' - g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (եթե $f \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (եթե $g \neq 0$)

այո, փարօրինակ են, բայց ի՞նչ արած

Այժմ արդեն կարող ենք հաշվել այնպիսի ֆունկցիաների արագություններ, ինչպիսիք են՝ x^2e^x , $4x^3 - 3x + 1$ կամ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

Իսկ ինչպես հաշվել $\sin(x^2)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Այլ կերպ ասած՝ այն ֆունկցիայի, որը ստացվում է, երբ $\sin x$ ֆունկցիայի մեջ փեղադրում ենք x^2 ֆունկցիան (x -ի փոխարեն)

այսպիսի ֆունկցիաները կոչվում են բարդ ֆունկցիաներ

$$h(x) = \overbrace{\sin}^{\text{արա մեջ}} \left(\underbrace{x^2}_{\text{փեղադրած սա}} \right) = f(g(x))$$

որպեղ f -ով ու g -ով նշանակել ենք համապատասխանաբար $\sin x$ և x^2 ֆունկցիաները: Դե, այս դեպքում

1. առանձին-առանձին հաշվում ենք $f(x) = \sin x$ -ի և $g(x) = x^2$ -ի ածանցյալները
2. $f'(x)$ -ի մեջ x -ի փոխարեն փեղադրում ենք $g(x)$ -ը՝ $f'(g(x))$
3. և ստացված թվերը բազմապատկում $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ստացված բանաձևով որոշվում է բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

մասնավորապես՝ $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$:



Նաթգ. Իսկ ինչի՞ է հավասար $(\sin x)^2$ -ու ածանցյալը:

Վերջապես, ոչինչ մեզ չի արգելում ածանցել f' ֆունկցիան: Իրոք, եթե ածանցում ենք f -ը, ստանում ենք դրա փոփոխման արագությունը ցույց տվող f' -ը, բայց այս f' -ն ինքը ֆունկցիա է, ուրեմն ինչո՞ւ չածանցել: Եթե f' -ը ցույց է տալիս f -ի արագությունը, f' -ի ածանցյալը ցույց կտա

f' -ի արագությունը = f -ի արագության արագությունը = f -ի արագացումը

f' -ի ածանցյալը նշանակում ենք f'' -ով, f'' -ինը՝ f''' -ով, և այդպես շարունակ: 15-րդ կարգի ածանցյալը նշանակում ենք ~~$f^{(15)}$~~ $f^{(15)}$ -ով, և այլն:

5.6 Ածանցյալի նշանը

նորից պարկերացրեք՝ կեք եք, գրաֆիկի վրա նստած պանուն եք վերև-ներքև

Երբ ինչ-որ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը, ասենք, 100 է, նշանակում է՝ այդ կետի հարևանությամբ ֆունկցիայի աճելու արագությունը բավականին մեծ է. մի փոքր չափով աջ գնալիս ֆունկցիան մոտավորապես 100 այդքանով մեծանում է: Եթե ինչ-որ պահի ածանցյալը դառնա 10, նշանակում է՝ ֆունկցիայի աճելու արագությունը փոքրացավ. արդեն ավելի դանդաղ է աճում: Եթե ավելի ուշ դարձավ 5, ուրեմն աճելու արագությունը էլ ավելի նվազեց: Իսկ այ եթե հաջորդ պահին ածանցյալը դառնա -5 , ապա...



Նաթգ. Ի՞նչ եք կարծում, ի՞նչ կնշանակի դա:

...ֆունկցիան այլևս ոչ թե աճում է, այլ՝ նվազում:

կարող ենք ասել՝ եթե

$$a - \delta < c < a < b < a + \delta$$

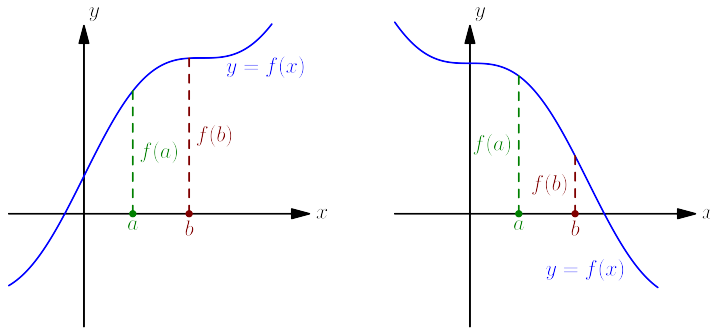
ինչ-որ մի փոքր δ -ի համար

Սահմանում 5.6 Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան a կետում **աճող** է, եթե a -ին շարժվելով ցանկացած b , c կետերում

$$f(c) < f(a) < f(b) \quad \text{եթե } c < a < b$$

և որ այն **նվազող** է, եթե

$$f(c) > f(a) > f(b) \quad \text{եթե } c < a < b$$



Նման ձևով կարող ենք սահմանել նաև *չնվազող*՝

$$f(c) \leq f(a) \leq f(b) \quad \text{եթե } c < a < b$$

և *չաճող*՝

$$f(c) \geq f(a) \geq f(b) \quad \text{եթե } c < a < b$$

Փունկցիայի գաղափարները, որոնք ներառում են նաև հավասարության դեպքերը:



Նաթգ. Կարող եք գծել/գրել այնպիսի ֆունկցիա, որը 0-ում աճող է, 1-ում՝ նվազող: Ո՞ր ֆունկցիան է *և՛* չաճող, *և՛* չնվազող:

Յուրաքանչյուր կետում կարող ենք պարզել՝ ֆունկցիան աճում է, թե նվազում, նայելով միայն նրա ածանցյալի նշանին:

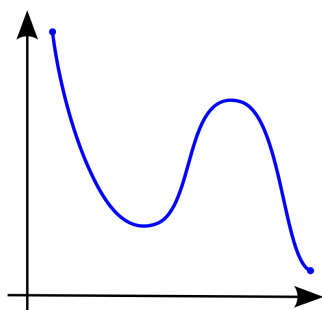
Թեորեմ 5.3 Ենթադրենք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է a կետում: Ուրեմն

- եթե $f'(a) > 0$, ապա f -ն a -ում աճող է
- եթե $f'(a) < 0$, ապա f -ն a -ում նվազող է
- եթե $f'(a) \geq 0$, ապա f -ն a -ում չնվազող է
- եթե $f'(a) \leq 0$, ապա f -ն a -ում չաճող է

դրական արագություն = աճող
բացասական արագություն = նվազող



Նաթգ. Ներքևում բերված ֆունկցիայի ածանցյալը ո՞ր կետերում է դրական: Իսկ որոնցում է բացասական:



Նաթգ. Պարկերացրե՛ք *ծիրանի գինը* դրել եք $x = 4$: Կնձանա՞, թե՞ կփոքրանա խանութի եկամուտը, եթե գինը մի փոքր բարձրացնեք:

5.7 Էքսպրեսմոմի խնդրի լուծումը

Փաստորեն արդեն գիտենք, թե ինչպես ածանցյալի նշանից հասկանալ՝ զինը բարձրացնել, թե՛ իջեցնել՝ եկամուտը մեծացնելու համար: Իսկ ինչպես պարզել, թե որ գնի դեպքում է եկամուտը ամենամեծը, այլ կերպ ասած՝ որ x կետում է ֆունկցիան ընդունում իր ամենամեծ արժեքը:



Նաթ. Ենթադրենք f ֆունկցիան իր ամենամեծ արժեքը ընդունում է a կետում: Ի՞նչ կարող եք ասել այդ կետում f -ի ածանցյալի մասին:

Իսկ այն կետը, որում ֆունկցիան ընդունում է այդ արժեքը, կանվանենք գլոբալ մաքսիմումի/մինիմումի *կետ*:

Պայմանավորվենք ֆունկցիայի ընդունած ամենամեծ արժեքն անվանել ֆունկցիայի *գլոբալ մաքսիմում*, ամենափոքրը՝ *գլոբալ մինիմում*, իսկ այս երկուսը միասին՝ *գլոբալ էքսպրեսմոմներ*:



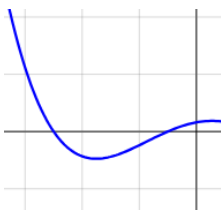
Զգուշացե՛ք. Որոշ ֆունկցիաներ ունեն գլոբալ մաքսիմում, որոշ ֆունկցիաներ՝ ոչ:

այսպեղ կարող էին լինել գրաֆիկներ, բայց փոխարենը կա *հղում*

Օրինակ 5.7 Գծելով հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ կնկատեք, որ

- $f(x) = x^2$ ֆունկցիան ունի
 - գլոբալ մինիմում $x = 0$ կետում
 - գլոբալ մաքսիմում չունի
- $f(x) = -x^2$ ֆունկցիան ունի
 - գլոբալ մաքսիմում $x = 0$ կետում
 - գլոբալ մինիմում չունի
- $f(x) = 25x^4 - 50x^2 + 16$ ֆունկցիան ունի
 - գլոբալ մինիմում $x = -1$ և $x = 1$ կետերում
 - գլոբալ մաքսիմում չունի
- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ֆունկցիան ունի
 - գլոբալ մինիմում $x \approx -4.49$ և $x \approx 4.49$ կետերում
 - գլոբալ մաքսիմում $x = 0$ կետում
- $f(x) = 5$ ֆունկցիան միշտ ընդունում է նույն արժեքը, որը և՛ գլոբալ մաքսիմումն է, և՛ գլոբալ մինիմումը
- $f(x) = 3x + 1$ ֆունկցիան չունի ոչ գլոբալ մաքսիմում, ոչ գլոբալ մինիմում

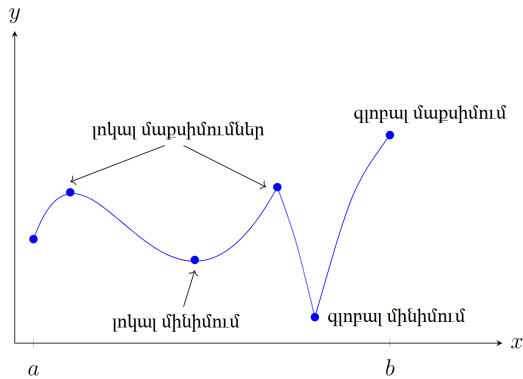
Ի՞նչ կարող եք ասել $f(x) = \cos x$ -ի գլոբալ էքսպրեսմոմների մասին:



կամ այնքան մոտեցնենք (*zoom* անենք), որ միայն այդքան մասը երևա

Իսկ ինչո՞ւ ենք շեշտում «գլոբալ», մի՞թե կան այլ մինիմումներ: Նիշենք նախորդ բաժնում պարզեցված *այս* ֆունկցիան: Քանի որ այն աջ գնալիս շարունակ փոքրանում է՝ ընդունելով ավելի ու ավելի փոքր արժեքներ, ապա այն գլոբալ մինիմում չունի: Սակայն նկատենք, որ $x \approx -2$ կետի մոտակայքում ֆունկցիան մի պահ նվազելով իջնում է ներքև, ապա սկսում դանդաղ բարձրանալ վերև, ինչի արդյունքում առաջանում է մի փոքր փոսիկ:

Նենց այդ փոսիկը կոչվում է ֆունկցիայի *լոկալ մինիմում*՝ այն իմաստով, որ եթե ֆունկցիան կորենք, ասենք, -3 և -1 կետերի միջև ու նայենք



սրացված փոքր տեղամասին, ապա կունենանք լոկալ մասշտաբով ամենափոքր արժեք: Նույն ձևով՝ $x \approx 0.5$ կետի մոտակայքում ունենք «փոքրիկ» լոկալ մաքսիմում:

Ավելի պարզերափոր՝ Զոմոլունգման գլոբալ մաքսիմում է, Մասիս սարը՝ լոկալ մաքսիմում: Գլոբալ մաքսիմումն, իհարկե, կարևոր է, բայց ինչպես կրեսները, լոկալ մաքսիմումները նույնպես չարժի աչքաթող անել:

Սահմանում 5.7 Կասենք, որ f -ը a կետում ընդունում է **լոկալ մաքսիմում** (մինիմում), եթե բավականաչափ փոքր $(a - \delta, a + \delta)$ միջակայքի կետերում f -ի ամենամեծ (ամենափոքր) արժեքը $f(a)$ -ն է:

Կամ այլ կերպ ասած՝ եթե գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ եթե $a - \delta < x < a + \delta$, ապա $f(x) \leq f(a)$ (լոկալ մինիմումի դեպքում՝ $\geq$):



Նաթգ. Որո՞նք են **նախորդ օրինակի** ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումները (եթե իհարկե կան):

Բնականաբար, ամեն մի գլոբալ էքստրեմում նաև լոկալ էքստրեմում է, իսկ այ հակառակը՝ ոչ միշտ է ճիշտ: Վերևում տեսել ենք, որ հնարավոր է՝ ֆունկցիան ընդհանրապես չունենա գլոբալ կամ նույնիսկ լոկալ մաքսիմում/մինիմում (քանի որ, օրինակ, միշտ ավելի ու ավելի մեծ/փոքր արժեքներ է ընդունում): Նշենք միայն, որ եթե x -երը սահմանափակ ենք ինչ-որ մի փակ (այսինքն՝ $[a, b]$ տեսքի) միջակայքում, ապա երաշխավորված է, որ այդքան տեղում կունենանք և՛ գլոբալ մինիմում, և՛ գլոբալ մաքսիմում:

փակ = ծայրակետերը ներառյալ

Թեորեմ 5.4 Եթե f -ն անընդհատ ֆունկցիա է, ապա այն ցանկացած $[a, b]$ միջակայքում ունի գլոբալ մաքսիմում և մինիմում:

Վերջապես ինչպե՞ս գտնենք ֆունկցիայի լոկալ կամ գլոբալ էքստրեմումները: Պարասխանը կրկին թաքնված է ֆունկցիայի ածանցյալի նշանի մեջ: Ենթադրենք՝ ինչ-որ a կետում f ֆունկցիան ընդունում է լոկալ մինիմումի արժեք, այսինքն՝ լոկալ իմաստով a -ի շրջակայքում $f(a)$ -ից փոքր արժեք չկա: Լավ, ուրեմն կարող է a կետում f -ի ածանցյալը լինել բացասական:

Եթե այն բացասական լինի, ապա f -ը a -ում պետք է լինի նվազող, այսինքն՝ մի փոքր առաջ գնալով (a -ից աջ՝ ինչ-որ մի $a + \delta$ կետում) ֆունկցիայի արժեքը կլինի ավելի փոքր, քան a -ում: Ինչը, սակայն, բացառված է, քանի որ a -ն լոկալ մինիմումի կետ է. նշանակում է $f'(a)$ -ն բացասական չէ՝ $f'(a) \geq 0$:



Նաթ. Կարո՞ղ է $f'(a)$ -ն լինել դրական:

Ենթադրելով, որ հարցին պարասխանեցիք «ոչ» և նմանափայ ձևով ապացուցեցիք դա, ֆիքսենք՝ $f'(a) \leq 0$: Ուրեմն միակ հնարավոր փարբերակը մնաց՝ կան f -ը a կետում ընդհանրապես ածանցյալ չունի, կան էլ եթե ունի, ապա $f'(a) = 0$: Այդպիսի կետերին անվանում ենք *կրիտիկական կետեր*:

այսինքն՝ եթե կա $f'(a)$, ապա $f'(a) = 0$

Թեորեմ 5.5 Եթե a -ն f -ի լոկալ կամ գլոբալ էքստրեմումի կետ է, ապա այն կրիտիկական կետ է:



Զգուշացե՛ք. Կրիտիկական կետ լինելը դեռ չի նշանակում, որ կետը էքստրեմումի կետ է:

Օրինակ 5.8 Գծենք հետևյալ երեք ֆունկցիաների գրաֆիկները.

- $f_1(x) = x^2$, որի համար $x = 0$ -ն մինիմումի կետ է: Իրոք՝

$$f_1'(x) = 2x, \quad f_1'(0) = 0$$

- $f_2(x) = -x^2$, որի համար $x = 0$ -ն մաքսիմումի կետ է՝

$$f_2'(x) = -2x, \quad f_2'(0) = 0$$

- $f_3(x) = x^3$, որի համար $x = 0$ -ն ոչ մինիմումի, ոչ մաքսիմումի կետ է, մինչդեռ՝

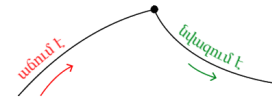
$$f_3'(x) = 3x^2, \quad f_3'(0) = 0$$

Փաստորեն $f'(x) = 0$ պայմանը անհրաժեշտ է, բայց *բավարար չէ*. ամեն կրիտիկական կետ չէ, որ լոկալ էքստրեմումի կետ է: Երրորդ ֆունկցիայի դեպքում, օրինակ, ածանցյալի գրո լինելը նշանակում էր՝ ֆունկցիան աճելով եկավ, արագությունը նվազեցրեց, դարձրեց 0, բայց հետո նորից սկսեց մեծացնել ու շարունակեց աճել (այլ ոչ թե սկսեց նվազել):

Լավ, բա ի՞նչ անենք: Պարկերացրե՛ք՝ կրկին գրաֆիկը նստած իջնում եք դեպի ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետը: Քանի դեռ չեք հասել այդ կետին, արագությունը բացասական է (կամ առնվազն՝ ոչ դրական), որովհետև իջնում եք: Նասնելով այդ կետին՝ արագությունը դառնում է 0 (կրիտիկական կետ է): Ի՞նչ է լինում, երբ այդ կետը անցնում ու գնում եք առաջ: Քանի որ լոկալ մինիմումի կետն անցել եք, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը պետք է բարձրանա. արագությունը ոչ բացասական է: Ուրեմն՝

Թեորեմ 5.6 Եթե f -ը դիֆերենցելի է a կետի մի որևէ $(a - \delta, a + \delta)$ շրջակայքում,

- եթե a կետից ձախ $f'(x) > 0$, իսկ a -ից աջ՝ $f'(x) < 0$, ապա a -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է
- եթե a կետից ձախ $f'(x) < 0$, իսկ a -ից աջ՝ $f'(x) > 0$, ապա a -ն լոկալ մինիմումի կետ է
- եթե a կետից աջ և ձախ $f'(x)$ -ի նշանը նույնն է, ապա a -ն լոկալ էքստրեմումի կետ չէ



Նաթոյ. Բնօրինակ կարգահայտեր f' -ի նշանի՝ դրականից բացասական դադարումը՝ օգտվելով f'' -ից:

Այն դեպքում, երբ հարմար չէ հաշվել f' -ը/հեթազոտել դրա նշանը, բայց փոխարենը հեշտ է գրել f -ի երկրորդ կարգի ածանցյալը, կարող ենք օգտվել հետևյալ թեորեմից.

Թեորեմ 5.7 Եթե $f'(a) = 0$ և

- $f''(a) > 0$, ապա a -ն լոկալ մինիմումի կետ է
- $f''(a) < 0$, ապա a -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է

Ուշադրություն դարձնենք, որ թեորեմը չի պարափսանում այն հարցին, թե ինչ է տեղի ունենում, երբ $f''(a) = 0$: Այդ դեպքում այս թեորեմն անօգուտ է, բայց կարելի է օգտվել նախորդ թեորեմից:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Stewart], 87-91 (սահման), 118-121 (անընդհատություն), 146-148, 154-161 և 199-201 (ածանցյալ), 274-279 (էքստրեմումներ) էջերը
- ըստ ցանկության՝ [Stewart], 99-101, 174-180, 184-189, 290-292 էջերը
- դիպել 3b1b-ի 1-ին, 2-րդ և 8-րդ տեսադասերը մաթեմատիկայի
- ըստ ցանկության՝ նաև 9-րդը
- կարելի է նաև գրել լուծված վարժություններ այսպես

5.8 Խնդիրներ

Խնդիր 5.1 Ունի՞ր արդյոք հաջորդականությունը սահման (երբ $n \rightarrow \infty$): Եթե այո, ապա գրեք այն.

ա. $\frac{3-n}{2}$

բ. $\frac{4\sqrt{n}}{n^3}$

գ. $\frac{n-1}{n^2-1}$

դ. 1^n

ե. 0.4^n

զ. $(-4)^n$

է. որպես առաջին անգամ՝ վերցրեք ցանկացած թիվ, որպես երկրորդ անգամ՝ վերցրեք առաջինը բաժանած 1.5-ի, ապա՝ երկրորդը բաժանած 1.5-ի, և այդպես շարունակ

ը. $a_1 = 1$,
 $a_2 = \frac{a_1}{7}$ -ում սպորակերից հետո գրված առաջին թվանշանը,
 $a_3 = \frac{a_2}{7}$ -ում սպորակերից հետո գրված առաջին թվանշանը,
 $\dots$



Նուշում. Որպեսզի զգաք, թե ինչպես է փոխվում հաջորդականությունը, գրեք դրա առաջին մի քանի անդամները: Վերջին կետում օգտվեք հաշվիչից:

Խնդիր 5.2 Սահմանների մասին թեորեմում ոչինչ չէինք կարող ասել $\frac{a_n}{b_n}$ -ի սահմանի մասին, երբ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$: Կարո՞ղ եք բերել այնպիսի a և b հաջորդականությունների օրինակներ, որոնց համար $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, բայց

ա. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

բ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -5$

գ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

դ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

ե. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ գոյություն չունի

Խնդիր 5.3 Ներկայա ֆունկցիաները բաղկացած են $x = 2$ կետում իրար «սոսնձած» երկու առանձին ֆունկցիաներից: Կարո՞ղ եք գտնել c -ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում ֆունկցիան անընդհար լինի 2-ում:

սկզբից փորձեք աչքաչափով

սա նույնպես

ա. $f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{երբ } x < 2 \\ x^2 + c & \text{երբ } x \geq 2 \end{cases}$

բ. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{երբ } x < 2 \\ cx^2 & \text{երբ } x \geq 2 \end{cases}$

գ. $f(x) = \begin{cases} -7 & \text{երբ } x < 2 \\ c & \text{երբ } x = 2 \\ 4 + 3 \sin(\pi x) & \text{երբ } x > 2 \end{cases}$

$$\eta. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{եթե } x \geq 2 \\ c & \text{եթե } x < 2 \end{cases}$$

Խնդիր 5.4 Զևար, Պրոմեթևսն ու Արամազդը 1000-ական ոսկի են ավանդ դնում համապատասխանաբար

1. ՕլիմպոսԲանկում, որտեղ գումարը x փարի հետո կազմելու է $f(x) = 100x + x^3$ ոսկի
2. ՏավրոսԲանկում, որտեղ գումարը x փարի հետո կազմելու է $f(x) = 0.18x^3 \cdot \sqrt{x}$ ոսկի
3. ԱրարաԲանկում, որտեղ գումարը x փարի հետո կազմելու է $f(x) = 30x^2$ ոսկի

Նաշվի առնելով, որ երեքն էլ անմահ են, նրանցից ով ի վերջո ավելի հարուստ կլինի ∞ շաբ ժամանակ անց:

Խնդիր 5.5 Գրեք հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

ա. $f(x) = 10000$

բ. $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$

գ. $f(x) = 2 \sin x \cdot e^x$

դ. $f(x) = e^{x^2}$

ե. $f(x) = x^2 \ln x$

զ. $f(x) = \frac{x^2}{x^3}$

է. $f(x) = \sin(\cos x)$

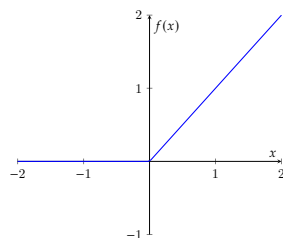
ը. $f(x) = x^x$

լուծում

Խնդիր 5.6 Մեքենայական ուսուցման մեջ հաճախ օգտագործվում են հետևյալ երկու ֆունկցիաները.

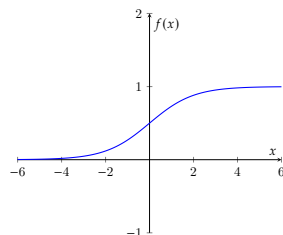
ա. ReLU (rectified linear unit)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{եթե } x > 0 \\ 0 & \text{եթե } x \leq 0 \end{cases}$$



բ. Սիգմոիդ`

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



Նաշվեք դրանց ածանցյալները: Կարո՞ղ եք սիգմոիդի ածանցյալն արտահայտել սիգմոիդով:

լուծում

Խնդիր 5.7 Դիցուք ունենք որևէ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ գծային ձևափոխություն՝

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

և ցանկանում ենք պարզել՝ ինչ տեղի կունենա, եթե այն մի փոքր փոփոխենք (օրինակ՝ $A + 0.001 \cdot I$): Մասնավորապես՝ որքա՞ն կփոխվի ձևափոխության որոշիչը, եթե նրան գումարենք (փոքր թիվ) $\times$ (միավոր մատրից):

Դա պարզելու համար համար նշանակենք՝

$$f(x) = \det(A + x \cdot I)$$

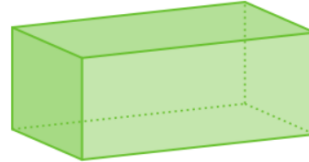
- ա. ինչի՞ է հավասար $f(0)$ -ն
- բ. օգտվելով ածանցյալի բանաձևից՝ գտեք $f'(0)$ -ն
- գ. ճանաչեցի՞ք

Խնդիր 5.8 Գտեք հետևյալ ֆունկցիաների լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը (եթե կան).

- ա. $f(x) = 5x - x^2$
- բ. $f(x) = 3x + 1$
- գ. $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$

լուծում

Խնդիր 5.9 Ունենք 24 մ² մակերեսով սրվարաթուղթ (ինչպես նաև մկրապ ու սոսինձ), որով ցանկանում ենք պարարաստել այսպիսի տուփ՝



որի ձախ և աջ նիստերը քառակուսիներ են:

Ամենաշատը որքա՞ն կարող է լինել այդ տուփի ծավալը:



Նուշում. Նախ՝ մի քիչ երկրաչափություն: Վերցրեք ոչ քառակուսի նիստերից մեկը, նշանակեք դրա երկարությունն ու լայնությունը x և y : Կարող եք y -ն արտահայտել x -ով: Իսկ ծավալը՝ x -ով:

6.1 Թեյլորի բազմանդամ

Սովորաբար երբ փորձում են, ասենք, վերականգնել մեքենայի կամ ինքնաթիռի շարժման հեղացիձր, վերցնում են ժամանակի ինչ-որ պահի (ասենք՝ շարժումը սկսելուց $t = 2$ վ անց) նրա ունեցած դիրքը, արագությունը, արագացումը, արագացման արագությունը, և այլն, ու փորձում այդ թվերի միջոցով հաշվել, թե որ կետում կգտնվի մարմինը ենթադրենք՝ $t = 3$ պահին:

Նույն ձևով՝ եթե ունենք որևէ a կետում ինչ-որ մի անհայտ f ֆունկցիայի արժեքը, ածանցյալը, երկրորդ կարգի ածանցյալը, և այլն, ապա կարող ենք մոտավորապես վերականգնել այդ a կետի մոտակայքում f -ի ունեցած արժեքներն ու նրա գրաֆիկը: Ինչպես դա անենք:



Նաթ. Որքա՞ն են $f(x) = 10 + 5(x - 3)$ ֆունկցիայի արժեքն ու ածանցյալը $x = 3$ կետում:

Ենթադրենք՝ ունենք, որ $f(a) = 4$ և $f'(a) = 3$: Սկզբի համար կարող ենք վերցնել, ասենք,

$$g(x) = 4$$

Ֆունկցիան, և այն a կետում իր արժեքով հավասար կլինի f -ին՝ $g(a) = f(a)$: Որպեսզի հավասարացնենք նաև a կետում f -ի և g -ի ունեցած արագությունները, g -ին գումարենք այնպիսի բան, որի ածանցյալը 3 է (օրինակ՝ $3x$), բայց որը գումարելով g -ի արժեքը չենք փչացնի (այսինքն՝ կշարունակենք ունենալ $f(a) = g(a)$): Գումարելով $3(x - a)$ ՝ կստանանք

$$g(x) = 4 + 3(x - a)$$

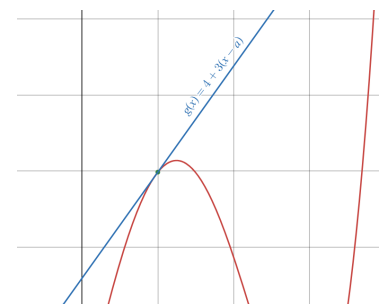
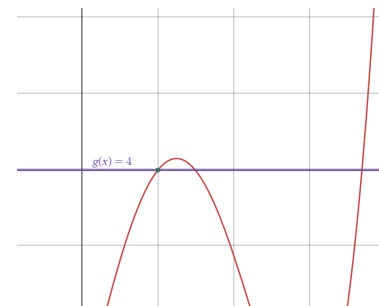
Իրոք, եթե ստացված ֆունկցիան ածանցենք, կունենանք՝ $g'(a) = 3$, ուրեմն՝ $g(a) = f(a)$ և $g'(a) = f'(a)$. մեր ստացած g ֆունկցիայի և՛ արժեքը, և՛ ածանցյալը համընկնում են f -ինի հետ: Իհարկե, սա դեռ չի նշանակում, որ f -ն ու g -ն նույն ֆունկցիաներն են. միգուցե ասենք՝ երկրորդ կարգի ածանցյալով դրանք իրարից տարբերվեն ($f''(a) \neq g''(a)$) և նույնը չլինեն: Բայց երկրորդ կարգի ածանցյալի արժեքը (արագացումը) սովորաբար զգացվում է, երբ a կետից փոքր-ինչ հեռանում ես, մինչդեռ եթե մենք շար-շար մոտ մնանք a կետին, ապա g -ի արժեքները ու գրաֆիկը մոտավորապես նույնը կլինեն, ինչ f -ինը՝

$$g(x) \approx f(x) \quad \text{երբ } x\text{-ը շատ մոտ է } a\text{-ին}$$

այլ կերպ ասած՝ մեր ստացած g ֆունկցիան *մոտարկում է* f -ին (թեև ոչ այնքան ճշգրիտ կերպով):

Եթե ուզում ենք, որ այն ավելի ճշգրիտ մոտարկի, գնանք մեկ այլ առաջ. փորձենք կառուցել այնպիսի g , որի արագացումը նույնպես համընկնի f -ինի հետ: Ենթադրենք՝ $f''(a) = 5$:

6.1 Թեյլորի բազմանդամ	73
6.2 Անորոշ ինտեգրալ	75
6.3 Որոշյալ ինտեգրալ	78
6.4 Նյութոն-Լայբնիցի բանաձևը	80
6.5 Ուռուցիկություն	82
6.6 Խնդիրներ	85

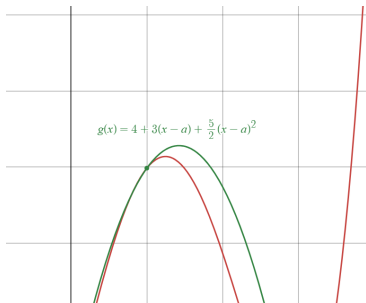




Նաթգ. Ի՞նչ գումարենք $g(x)$ -ին, որպեսզի դրա երկրորդ կարգի ածանցյալը նույնպես a կերպում լինի 5 ՝ $g''(a) = 5$:

Երկրորդ կարգի ածանցյալը ստանալու համար ավելացնենք ևս մեկ գումարելի՝

$$g(x) = 4 + 3(x - a) + \frac{5}{2}(x - a)^2$$



Կրկին, դժվար չէ ստուգել, որ այս ֆունկցիայի համար $g''(a) = f''(a) = 5$ և $g(a) = f(a)$, $g'(a) = f'(a)$: Ինչո՞ւ ենք բազմապարկում $\frac{1}{2}$ -ով. որպեսզի ածանցելիս $(x-a)^2$ -ու ցուցիչը իջնելով բազմապարկվի և կրճատվի դրա հետ (հակառակ դեպքում $g''(a)$ -ն 2 անգամ մեծ կլիներ):

Այս սխեմայով եթե շարունակենք, կստանանք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$g(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2} \cdot (x - a)^3 + \dots$$

որը a կերպում կունենա

- նույն արժեքը, ինչ f -ը
- նույն արագությունը, ինչ f -ը
- նույն արագացումը, ինչ f -ը
- նույն արագացման արագությունը, ինչ f -ը
- ...

հետևաբար բավական մոտ կլինի իսկական f ֆունկցիայի արժեքներին a կետի շրջակայքում: Քանի որ գործնականում ոչ հնարավոր է, ոչ էլ կարիք կա հաշվելու բոլոր (անվերջ քանակով) ածանցյալները, սովորաբար բավարարվում են գրելով միայն առաջին մի քանի գումարելիները՝

$$P_k(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2} \cdot (x - a)^k = \sum_{j=1}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j$$

և ստացված ֆունկցիան անվանում k -րդ կարգի **Թեյլորի բազմանդամ**:

k անգամ դիֆերենցելի = ունի 1-ին, 2-րդ, ..., k -րդ կարգի ածանցյալներ

Ի՞նչ կլինի, եթե օրինակ $x-a = 0.1$, $k = 5$

Թեորեմ 6.1 Եթե $f(x)$ ֆունկցիան k անգամ դիֆերենցելի է a կետում, ապա

$$P_k(x) \approx f(x)$$

a կետի ինչ-որ (միգուցե՝ փոքր) շրջակայքում: Ավելի ճշգրիտ՝

$$P_k(x) - f(x) = c \cdot (x - a)^{k+1}$$

որտեղ c -ն ինչ-որ ֆիքսված թիվ է (արժեքը կարևոր չէ):



Նաթգ. Կարո՞ղ եք գրել $f(x) = x^2 + 7x - 6$ ֆունկցիայի 10-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը: Իսկ ո՞րն է դրա 2-րդ կարգինը: Իսկ 1-ի՞ն:

Այսինքն՝ որքան k -ն՝ գումարելիների թիվը, մեծացնենք, այնքան ավելի ճշգրիտ մոտարկում կստանանք a կետին մոտիկ կետերում: Նամոզվելու համար **սխեմ**, օրինակ, $\frac{1}{1-x}$ ֆունկցիայի Թեյլորի բազմանդամները:

Գործնականում հաճախ վերցնում են ընդամենը առաջին $k = 1$ (գծային), 2 (քառակուսային) կամ 3 (խորանարդային մոտարկումներ) գումարելիները. մի կողմից դրանք բավարար ճշգրիտ են, մյուս կողմից՝ ավելի մեծ k -երի դեպքում ունենում ենք բարձր աստիճանի բազմանդամ, որը a -ից հեռու կետերում իրեն լավ չի պահում:

լավ չի պահում = շատ է տարանջատվում



Զգուշացե՛ք. Նույն ֆունկցիայի համար, սակայն տարբեր a կետերում գրված Թեյլորի բազմանդամները տարբերվում են: Յուրաքանչյուրը լավ է մոտարկում միայն իր a կետին մոտիկ տեղամասում, a -ից հեռանալիս՝ ճշգրտությունն ընկնում է:

Օրինակ 6.1 $a = 0$ կետի համար հետևյալ ֆունկցիաները կարելի է գրել՝

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
- եթե f -ն ինքը բազմանդամ է, ապա P_k -ն նրա առաջին k անդամներն են



Նաթ. Օգտվելով $\frac{1}{1+x}$ -ի Թեյլորի բազմանդամից՝ ինչպե՞ս ստանանք $\frac{1}{1-x}$ -ի Թեյլորի բազմանդամը:

6.2 Անորոշ ինտեգրալ

Ֆունկցիայի Թեյլորի բազմանդամը կառուցելիս առնչվեցինք նման հարցի. ո՞ր ֆունկցիայի ածանցյալն է հավասար 3 -ի: Քանի որ գիտեինք, թե ինչի են հավասար մի քանի տարբեր ֆունկցիաների ածանցյալները, հետ գնալով կռահեցինք, որ այդպիսի ֆունկցիա է $3x$ -ը:



Նաթ. Ո՞ր ֆունկցիայի ածանցյալն է $4x^3$:

Ընդ որում $3x$ -ից բացի նույն ածանցյալն ունեն նաև $3x + 1$, $3x + 4$, $3x - 1000$ ֆունկցիաները: Պարզաբան այն է, որ երբ $3x$ -ին գումարում ենք որևէ հաստատուն թիվ՝ c , վերջինիս ածանցյալը զրո է: Ուրեմն $3x + c$ տեսքի բոլոր ֆունկցիաների ածանցյալները հավասար են 3 ֆունկցիային:

Կարճ կասենք, որ եթե

f -ը F -ի ածանցյալն է

ապա

F -ը f -ի նախնականն է

իսկ F ֆունկցիայի բոլոր նախնականները իրար հետ (բոլոր նախնականների բազմությունը) կանվանենք F -ի *անորոշ ինտեգրալ*:

Փաստորեն ֆունկցիայի նախնականը այն ֆունկցիան է, որը պարասխանում է «ո՞ր ֆունկցիան ածանցեմ, որպեսզի ստանամ այս ֆունկցիան» հարցին, և բավարար է գրնել նմանապիպ որևէ ֆունկցիա ու դրան հասարարուն թվեր գումարելով՝ կստանանք մնացած բոլոր նախնականները:

Թեորեմ 6.2 f ֆունկցիայի բոլոր նախնականներն իրարից տարբերվում են հասարարուններով:

Օրինակ 6.2 $f(x) = 4x^3$ ֆունկցիայի համար նախնական են

- x^4
- $x^4 + 5$
- $x^4 + 100000000$
- ...

ֆունկցիաները, այսինքն $f(x)$ -ի բոլոր նախնականներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x^4 + c$$

որտեղ c -ն ցանկացած հասարարուն է

$f(x)$ -ի բոլոր նախնականները, նույն ինքը՝ անորոշ ինտեգրալը, կնշանակենք այսպես՝

$$\int f(x) dx$$

տվյալ օրինակում՝

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

Այս $\int$ -ն ու dx -ը ընդամենը ինչ-որ սիմվոլներ են (ոչ մի բազմապարկում կամ այլ իմաստ չկա), որոնց արանքում գրում ենք մեր ինտեգրվող ֆունկցիան:



Նաթց. Ո՞ր ֆունկցիան է և՛ ինքը իր նախնականը, և՛ ածանցյալը:

Ինտեգրալը նույնպես օժտված է գծային հատկություններով.

a -ն ցանկացած թիվ է

$$\begin{aligned} \int a \cdot f(x) dx &= a \cdot \int f(x) dx \\ \int f(x) \pm g(x) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \end{aligned}$$

այսինքն՝ կարող ենք գրել

$$\int 3x^2 + 4x dx = x^3 + 2x^2 + c$$

Եթե երկու ֆունկցիաների գումարը ինտեգրելիս դրանց որոշում ենք առանձին-առանձին ինտեգրել, յուրաքանչյուրի ինտեգրալը հաշվելիս ունենում ենք $+c$: Արդյունքում գումարի մեջ ունենում ենք $+2c$, որը սակայն կարող ենք գրել պարզապես $+c$. այս c -երը կարող են լինել ցանկացած թվեր, և փարբերություն չկա՝ վերցնել ցանկացած թվին գումարել մեկ ուրիշ ցանկացած թիվ, թե՛ պարզապես վերցնել ինչ-որ մի երրորդ ցանկացած թիվ:



Նաթգ. Կարող եք գտնել $\int \cos x \, dx$ -ը: Իսկ $\int 2x \cos(x^2) \, dx$ -ը:

Նիշենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցման կանոնը՝

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Եթե մեզ պետք լիներ ստանալ ասենք՝ աջ մասի երկրորդ գումարելիի ինտեգրալը, կարող էինք նախ այն գրել այս տեսքով՝

$$f(x)g'(x) = \underbrace{(f(x)g(x))'}_{\text{ո՞րն է նախնականը}} - f'(x)g(x)$$

ապա երկու կողմերն ինտեգրել՝

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Այս բանաձևը հաճախ է օգտագործվում ինտեգրալներ հաշվելիս և կոչվում է *մասերով ինտեգրում*: Տաճախ $g'(x) \, dx$ -ի փոխարեն կարճ գրում են $dg(x)$.

$$\int f(x)g'(x) \, dx = \int f(x) \, dg(x)$$

Նույն ձևով գրելով $f'(x) \, dx = df(x)$ ՝ կունենանք

$$\int f \, dg = fg - \int g \, df$$

Օրինակ 6.3 Ո՞ր ֆունկցիայի ածանցյալն է $x \cos x$ -ը: Գրենք՝

$$\int x \cos x \, dx$$

ներկայացնենք $\cos x$ -ը որպես մեկ ուրիշ ֆունկցիայի ածանցյալ՝

$$= \int x(\sin x)' \, dx = \int x \, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

Իսկ այսպես արդեն գիտենք, թե ով է $\sin x$ -ի ինտեգրալը.

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

Տամոզվելու համար կարող ենք ստացվածը ածանցել և տեսնել, որ իրոք լինում է $x \cos x$:

Integral

ինտեգրալը կիրառվում է նաև կյանքում



Նաթգ. Ո՞ր ֆունկցիաներն են x^{100} -ի նախնականները:

Առայժմ ինտեգրելը խաղի նման ինչ-որ բան է՝ վերցնում ես ֆունկցիան, կռահում, թե ում ածանցյալն է: Շուտով կպարզենք, թե ո՞րն է դրա

կիրառական նշանակությունը: Մինչ այդ ֆիքսենք մի քանի հայտնի ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալները՝

- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (բացառությամբ երբ $n = -1$)
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x \, dx =$ լրացրու ինքդ

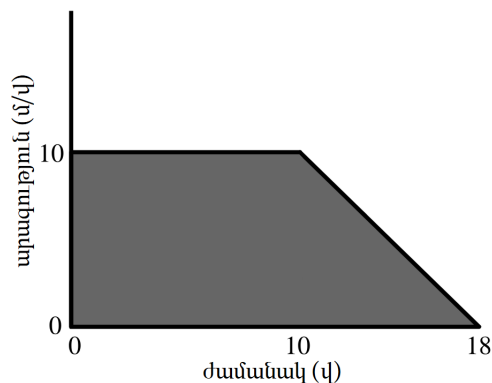


Նաթգ. Եթե ածանցյալը ֆունկցիայի արագությունն է, ապա ի՞նչ եք կարծում, ինտեգրալն ինչը պիտի լինի:

6.3 Որոշյալ ինտեգրալ

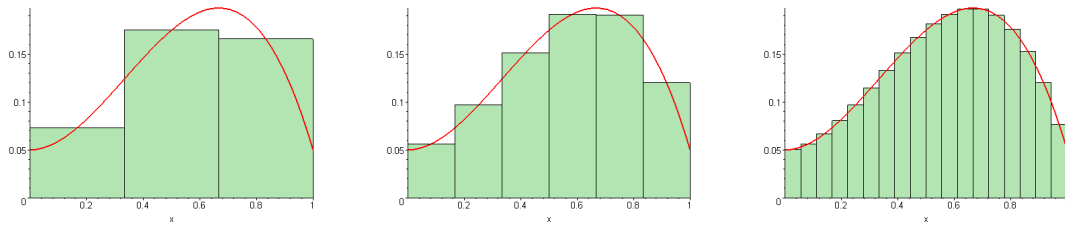
կարող ենք համարել՝ $v(t) = s'(t)$

Նկարում պարկերված է մեքենայի արագության գրաֆիկը՝ կախված ժամանակից: Ինչպես հայտնի է, երբ մեքենան շարժվում է հավասարաչափ արագությամբ, նրա անցած ճանապարհը հավասար է ժամանակ $\times$ արագություն, այսինքն՝ $t \in [0, 10]$ միջակայքում մեքենայի անցած ճանապարհը $= 100$ մ $=$ քառակուսի մասի մակերեսին:



$t = 10$ պահից սկսած մեքենայի արագությունը սկսում է հաստատուն արագացմամբ նվազել և ի վերջո դառնում է 0: Ուրեմն $t \in [10, 18]$ միջակայքում մեքենայի միջին արագությունն է 5, հեղուկաբար նրա անցած ճանապարհը $= 40$ մ $=$ եռանկյուն մասի մակերեսին:

Ինչպես նկատում եք, կա օրինաչափություն. մարմնի անցած ճանապարհը յուրաքանչյուր $t \in [a, b]$ ժամանակահատվածում հավասար է $t = a$ և $t = b$ կետերի միջև նրա արագության գրաֆիկի փակ եղած մակերեսին: Այս սկզբունքը ճիշդ է ոչ միայն հաստատուն կամ հավասարաչափ դանդաղող շարժման, այլ առհասարակ ցանկացած շարժման դեպքում:



Նաթց. $s(t)$ ֆունկցիայի ի՞նչն է $v(t)$ -ն: Իսկ $v(t)$ -ի ի՞նչն է $s(t)$ -ն:

Իսկ ի՞նչ, եթե արագության գրաֆիկը բաղկացած լիներ ոչ թե քառակուսուց և եռանկյունից, այլ լիներ ավելի բարդ տեսքի: Ինչպե՞ս հաշվել այս կամ այն ֆունկցիայի գրաֆիկի տակ եղած մակերեսը:

Ինչպես և հավանաբար կանեիք առօրյա կյանքում, մոտարկենք այդ մակերեսը *ուղղանկյուններով*. բաժանենք մեր $[a, b]$ միջակայքը (տրոհենք) բազմաթիվ փոքր հատվածիկների՝

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

որտեղ $x_0 = a$, իսկ $x_n = b$

յուրաքանչյուր k -րդ հատվածի չափը նշանակելով Δx_k -ով՝ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, այնուհետև յուրաքանչյուր հատվածի վրա կառուցենք այնպիսի ուղղանկյուն, որը մոտիկ լինի այդ հատվածի վրա f -ի գրաֆիկին: Քանի որ f -ի գրաֆիկի «բարձրությունը» պարզապես ամեն կետում f -ի ընդունած արժեքն է, ամեն $[x_{k-1}, x_k]$ հատվածում վերցնենք որևէ c_k կետ և դիտարկենք այն ուղղանկյունը, որի

- բարձրությունը $f(c_k)$ է
- հիմքը՝ $[x_{k-1}, x_k]$ հատվածը

Սրացված ուղղանկյան մակերեսը կլինի $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, հետևաբար բոլոր ուղղանկյունների մակերեսը միասին՝

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Որքան n -ը մեծ լինի, իսկ հատվածիկների երկարությունները՝ փոքր, այնքան այս գումարը մոտ կլինի f -ի գրաֆիկի տակ եղածին: Այն թիվը, որը կստանանք՝ վերևի գումարում հատվածների երկարությունները ձգարեցնելով 0-ի, ցույց կտա $[a, b]$ միջակայքում f -ի գրաֆիկով սահմանափակված մակերեսը և կկոչվի f ֆունկցիայի *որոշյալ ինտեգրալ* այդ միջակայքում:

c_k -երի ընտրությունը այսպեղ կարևոր չէ, քանի որ վերջում *նույն թիվն* ենք ստանալու (երբ $n \rightarrow \infty$)

Սահմանում 6.1 Ներկայ թիվը՝

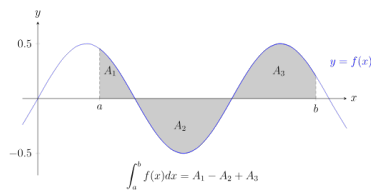
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **որոշյալ ինտեգրալ** $[a, b]$ միջակայքում և նշանակվում

$$\int_a^b f(x) dx$$

ավելի ճշգրիտ՝ ոչ թե $\lim_{n \rightarrow \infty}$, այլ $\lim_{\lambda \rightarrow 0}$, որտեղ λ -ն ամենաերկար հատվածի երկարությունն է

ասում են, որ $\int_a^b f(x) dx$ -ը նշանակողի մակերես է (signed area)



Այսպես անենք մի կարևոր նշում: Եթե $f(x)$ -ի արժեքները $[a, b]$ միջակայքում դրական են, այսինքն՝ նրա գրաֆիկը ընկած է x -երի առանցքից վերև, ապա $\int_a^b f(x) dx$ -ը իրոք կփա դրանից ներքև եղած մակերեսը, բայց եթե այն բացասական է՝ $f(x) < 0$ (x -երի առանցքից ներքև), ապա $\int_a^b f(x) dx$ -ի արժեքը կլինի բացասական՝ f -ի գրաֆիկի և x -երի առանցքի արանքում ընկած մակերեսը, սակայն միմուս նշանով: Այսինքն կախված $[a, b]$ -ում f -ի նշանից՝ դրա որոշյալ ինտեգրալը մոդուլով հավասար է նրա գրաֆիկով սահմանափակված մակերեսին, իսկ նշանով համընկնում է f -ի հետ:



Նաթց. Որքա՞ն է $\int_a^b f(x) dx$ -ը, եթե f -ը $[a, b]$ միջակայքում հավասար է 0-ի: Նմարավո՞ր է, որ $\int_a^b f(x) dx = 0$, բայց f -ը 0 չլինի:

6.4 Նյութոն-Լայբնիցի բանաձևը

Ինչպե՞ն հաշվել $\int_a^b f(x) dx$ -ը, եթե ունենք $f(x)$ -ի բանաձևը (կամ առհասարակ ինչո՞ւ է այն կոչվում «ինտեգրալ»): Օրինակ՝ երբ f -ը մարմնի արագությունն է, որը իր հերթին անցած ճանապարհի անգյալն է՝ $f(t) = v(t) = s'(t)$, ապա $t = a$ և $t = b$ կետերի միջև նրա գրաֆիկի փակ եղած մակերեսը այդ ընթացքում մարմնի անցած ճանապարհն է՝ $\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$: Պարզվում է, որ այս կանոնը ճիշտ է ցանկացած դեպքում:

Թեորեմ 6.3 Եթե $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ -ի որևէ նախնական է, ապա

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Եթե G -ն նույնպես f -ի նախնական է, ապա $G(x) = F(x) + c$, հետևաբար

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Այսինքն՝ ֆունկցիայի փակ եղած մակերեսը երկու կետերի միջև հավասար է այդ կետերի միջև իր նախնականի փոփոխությանը: Ճիշտ է՝ f -ը ունի ոչ թե մեկ նախնական, այլ անվերջ հափ, բայց դրանց բոլորի փարբերությունները երկու կետերի միջև նույնն են: Ուրեմն՝ $\int_a^b f(x) dx$ -ը հաշվելու համար հաշվում ենք (անորոշ) $\int f(x) dx$ -ը, այսինքն՝ գտնում f -ի որևէ F նախնական (փարբերություն չկա, թե որը), և հաշվում դրա արժեքների փարբերությունը a և b կետերում:

$F(b) - F(a)$ կարճ գրում ենք՝ $F(x)|_{x=a}^b$

Օրինակ 6.4 $y = x^2$ պարաբոլի փակ եղած մակերեսը $x \in [0, 2]$ միջակայքում՝

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=0}^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}$$

Նույն կերպ $y = \sin x$ -ինը $x \in [0, \pi]$ -ում՝

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_{x=0}^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$

Նկատենք, որ $[0, \pi]$ միջակայքում սինուսը դրական է, այսինքն այն, ինչ սփացել ենք, հենց գրաֆիկի ներքևում եղած մակերեսն է: Իսկ այ

օրինակ՝

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{x=0}^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

ոչ թե որովհետև կոսինուսի գրաֆիկի փակ մակերես չկա, այլ որովհետև $[0, \pi]$ միջակայքի առաջին կեսում ֆունկցիան դրական է, երկրորդում՝ բացասական, դրա հաշվին գումարը զրոյանում է:



Նաթոգ. Ինչպե՞ն կհաշվեք $|\cos x|$ -ի փակ եղած մակերեսը $[0, \pi]$ -ում:

Բնականաբար, որոշյալ ինտեգրալը նույնպես ունի այն գծային հարկություններն, ինչ անորոշը.

$$\begin{aligned} \int_a^b c \cdot f(x) \, dx &= c \cdot \int_a^b f(x) \, dx \\ \int_a^b f(x) \pm g(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

Մյուս կողմից՝ ցանկացած $[a, b]$ միջակայքում եղած մակերեսը կարող ենք գրել որպես երկու մակերեսների գումար՝ a -ից c և c -ից b .

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Կարող ենք նաև ավելի հեռուն գնալ և սահմանել ասենք՝ $\int_5^2 f(x) \, dx$, որպես $[2, 5]$ միջակայքում f -ի գրաֆիկով սահմանափակված մակերեսը՝ հակառակ նշանով.

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

և գրել նաև՝ $\int_a^a f(x) \, dx = 0$:

Վերջապես նկատենք մի այսպիսի նրբություն. երբ գրում ենք $\int_a^b f(x) \, dx$, նկատի ունենք f ֆունկցիայի գրաֆիկի փակ մակերեսը (համապատասխան նշանով): Այդ մակերեսի արժեքի մեջ x փոփոխականը որևէ դեր չի խաղում. կարող էինք x -ի փոխարեն գրել, ասենք, y կամ z ՝

$$\int_4^{25} \sin x \, dx = \int_4^{25} \sin y \, dy$$

Պարկերավոր ասած՝ գծում ենք ֆունկցիայի գրաֆիկն ու $y = 4$ կետից շարժվում դեպի $y = 25$ կետը: Ամեն կետում չափում ենք գրաֆիկի բարձրությունը, և որքան մեծ է ֆունկցիայի արժեքը, այնքան ավելի շար մակերես ենք ստանում, որքան փոքր է՝ այնքան քիչ, իսկ բացասական արժեքների դեպքում ստանում ենք բացասական մակերես: Այս գործողության ընթացքում y -ը մեր պուլսն է, որով կառավարում ենք 4-ից դեպի 25 շարժը. անկախ նրանից, թե ինչպես կանվանենք այդ պուլսը, ստացվող մակերեսը նույնն է: Ներկայումս ինտեգրելիս փոփոխականի անունը *կարևոր չէ*:



կամ t -ն/ x -ը/ y -ը մեր բաժակն է, որը a -ից b փանելով *լցնում ենք* ջրով

Ավելին, կարող էինք նույնիսկ y -ի քառակուսի արմարը նշանակել $\sqrt{y} = t$ -ով և y -ի փոխարեն գրել $t^2 \sin(t^2) d(t^2)$: Միակ բանը, որին պետք է ուշադրություն դարձնենք, այն է, որ եթե y -ը փոխվում է 4-ից 25, ապա նրա արմարը՝ t -ն, պետք է փոխվի $\sqrt{4}$ -ից $\sqrt{25}$, այսինքն՝

$$\int_4^{25} \sin y \, dy = \int_2^5 \sin(t^2) d(t^2)$$

Օրինակ 6.5 Հաշվենք $\frac{1}{x-4}$ -ի գրաֆիկի փակ եղած մակերեսը $[5, 10]$ միջակայքում.

$$\int_5^{10} \frac{1}{x-4} dx$$

հիշենք, որ $\frac{1}{x}$ -ի նախնականը $\ln x$ է

Ինչքան լավ կլիներ, եթե $x - 4$ -ի փոխարեն ունենայինք x : Բայց այ եթե $x - 4$ -ը նշանակենք y -ով, կունենանք հենց $\frac{1}{y}$:

Եթե $x \in [5, 10]$, ապա $y \in [5 - 4, 10 - 4]$, այսինքն՝ $y \in [1, 6]$, և կունենանք՝

$$\int_5^{10} \frac{1}{x-4} dx = \int_1^6 \frac{1}{y} d(y+4)$$

ինչպես հիշում ենք, $dg(x) = g'(x) dx$

Այսպես $d(y+4) = (y+4)' dy = 1 \cdot dy$, հետևաբար՝

$$\int_1^6 \frac{1}{y} d(y+4) = \int_1^6 \frac{1}{y} dy = \ln y \Big|_{y=1}^6 = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6 \approx 1.79$$

Այս մեթոդը կոչվում է *փոփոխականի փոխարինում*:



Նաթ. Ենթադրենք $f(x)$ -ի գրաֆիկը համաչափ է սկզբնականի նկարումս, այսինքն՝ $f(-x) = -f(x)$: Փորձենք պատկերել այդպիսի որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ: Որքա՞ն է $\int_{-10}^{10} f(x) dx$ -ը:

6.5 Ուռուցիկություն

Եթե 1-ին կարգի ածանցյալը ցույց է տալիս ֆունկցիայի արագությունը, ապա 2-րդ կարգինը ցույց է տալիս նրա արագացումը: Փորձենք երկրաչափորեն մեկնաբանել դա:

Նախ՝ ենթադրենք $f'(a) > 0$, ուրեմն՝ f -ը a կետում աճում է: Բայց ֆունկցիան կարող է աճել փարբեր ձևերով, ասենք այսպես՝

Ի՞նչ եք կարծում, ո՞ր գրաֆիկում է ֆունկցիայի արագացումը դրական

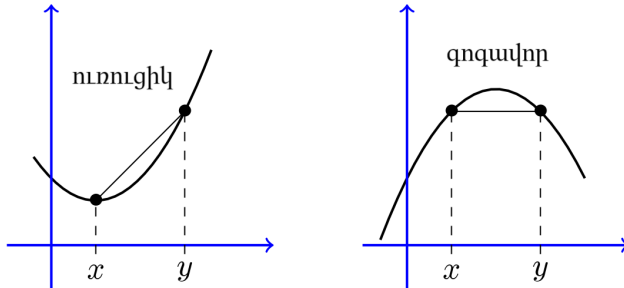


պատկերավոր ասած՝ փակով կամ վրայով:

Սահմանում 6.2 Եթե (a, b) միջակայքի ցանկացած երկու կետերում ֆունկցիայի գրաֆիկն ընկած է այդ կետերը միացնող հատվածից

- ներքև, ապա կասենք, որ ֆունկցիան **ուռուցիկ** է (a, b) -ում
- վերև, ապա կասենք, որ ֆունկցիան **գոգավոր** է (a, b) -ում

անգլերեն՝ ուռուցիկ — convex,
գոգավոր — concave



Կետերը միացնող հատվածից վերև կամ ներքև գտնվելը կարող ենք ձևակերպել նաև այսպես. ֆունկցիան

- ուռուցիկ է, եթե

$$f(\alpha p + (1 - \alpha)q) \leq \alpha f(p) + (1 - \alpha)f(q)$$

ի՞նչ է սա նշանակում $\alpha = 0.5$ դեպքում

- գոգավոր է, եթե

$$f(\alpha p + (1 - \alpha)q) \geq \alpha f(p) + (1 - \alpha)f(q)$$

ցանկացած $p, q \in [a, b]$ կետերի և $0 \leq \alpha \leq 1$ թվի դեպքում:



Զգուշացե՛ք. Ֆունկցիան կարող է մի կետում ուռուցիկ լինել, մյուսում՝ գոգավոր:

Վերևում գրվածը չենք ապացուցի, բայց կզգանք, թե այն ինչ է նշանակում **բզբզալով** α -ի արժեքները: Ինչպես կռահում եք, ֆունկցիայի ուռուցիկ/գոգավոր լինելը կարելի է պարզել նրա երկրորդ կարգի ածանցյալի միջոցով.

Թեորեմ 6.4 Եթե $f(x)$ ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա

- f -ը ուռուցիկ է այն կետերում, որտեղ $f''(x) \geq 0$
- f -ը գոգավոր է այն կետերում, որտեղ $f''(x) \leq 0$

Օրինակ 6.6

- $f(x) = x^2$ -ն ուռուցիկ է բոլոր կետերում, քանի որ

$$f''(x) = 2 > 0$$

- $f(x) = -x^2$ -ն գոգավոր է բոլոր կետերում, քանի որ

$$f''(x) = -2 < 0$$

- $f(x) = \sin x$ -ը $(0, \pi)$ միջակայքում զոգավոր է, իսկ $(\pi, 2\pi)$ -ում՝ ուռուցիկ.

$$f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$$



Նաթց. Ո՞ր ֆունկցիան է, որ ցանկացած կետում և՛ ուռուցիկ է, և՛ զոգավոր:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Stewart], 290-295 էջերը (ուռուցիկություն)
- ըստ ցանկության՝ նաև [Stewart], 325-328 էջերը
- կարդալ [Banner], 519-523 էջերը (Թեյլորի բազմանդամ)
- վերադառնալ [Stewart], 365-366, 372-373, 379-381, 391-394, 397-398 էջերին (ինտեգրալ)
- ծանոթանալ [Stewart]-ի 7-րդ գլխին (ինտեգրման մեթոդներ)
- դիտել 3b1b-ի [11-րդ](#) և [14-րդ](#) տեսադասերը մաթեմատիկից
- ըստ ցանկության՝ նաև [15-րդը](#)
- կարելի է նաև գտնել լուծված վարժություններ [այստեղ](#)

6.6 Խնդիրներ

Խնդիր 6.1 Գտեք $\int f(x) dx$ -ը.

ա. $f(x) = 3x^2$

բ. $f(x) = x + 6 \cos x$

գ. $f(x) = \frac{3}{x} - 1$

դ. $f(x) = \frac{4x}{1 - 2x^2}$

ե. $f(x) = \operatorname{tg} x$

Խնդիր 6.2 Տիեզերանավը թռչում է Երկրից Լուսին: Թռիչքի մեկնարկից x ժամ անց նրա արագությունը

լուծում

$$f(x) = x^5 + x^2$$

հզր կմ/ժ է:

ա. որքա՞ն ճանապարհ է այն անցնում առաջին 3 ժամում

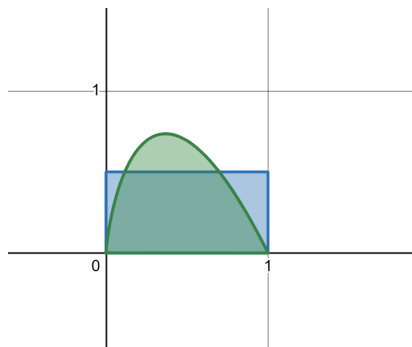
բ. հեղուկաբար, որքա՞ն է տիեզերանավի միջին արագությունը

Խնդիր 6.3 Նկարում պատկերված է

լուծում

$$f(x) = -x \cdot \ln(x^2)$$

Ֆունկցիայի գրաֆիկը $[0, 1]$ հատվածի վրա: Նայումի է, որ կանաչ



և կապույտ տիրույթներն ունեն նույն մակերեսը: Որքա՞ն է կապույտ ուղղանկյան բարձրությունը:

Խնդիր 6.4 Կան երկու ֆունկցիայից նոր ֆունկցիա ստանալու մի քանի տարբեր ձևեր: Դրանցից մեկը, որ կարևոր դեր է խաղում մեքենայական ուսուցման մեջ, կոչվում է *փաթույթ*:

անգլերեն՝ convolution

Երկու f և g ֆունկցիաների փաթույթ է կոչվում (և $f * g$ -ով նշանակվում) այն ֆունկցիան, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^1 f(y)g(x-y) dy$$

x -ը ֆիքսված է, y -ը փոփոխվում է

Որքա՞ն է $f * g$ -ի արժեքը $x = 0$ կետում, եթե $f(x) = x^2$ և

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{եթե } x > 0 \\ 0 & \text{եթե } x \leq 0 \end{cases}$$



Նուշում. $f * g$ -ում տեղադրենք g -ի բանաձևը, ապա բաժանենք $[-1, 1]$ միջակայքը երկու մասի՝ որտեղ որ $g = 0$, և որտեղ $g = 1$:

Խնդիր 6.5 Պարզենք, թե որքան է r շառավղով շրջանի մակերեսի բանաձևը: Սկսենք 1 շառավղով շրջանից՝ $x^2 + y^2 = 1$:

- ա. արտահայտեք y -ն x -ով, որ միջակայքում է փոխվում x -ը
- բ. որ $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալն է պետք հաշվել
- գ. կարարեք փոփոխականի փոխարինում՝ x -ը նշանակելով $\sin t$ -ով, որ միջակայքում պետք է փոփոխենք t -ն
- դ. ի՞նչ արտահայտություն է ստացվում ինտեգրալի նշանի տակ
- ե. օգտվելով $(\cos t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ բանաձևից՝ հաշվեք ինտեգրալը
- զ. որքա՞ն է 1 շառավղով շրջանի մակերեսը
- է. ի՞նչ գծային ձևափոխություն կիրառենք՝ r շառավղով շրջան ստանալու համար
- ը. քանի՞ անգամ կմեծանա մակերեսը

Շաք փոփոխականի Ֆունկցիա

7

7.1 $f(x, y)$ -ի գրաֆիկը

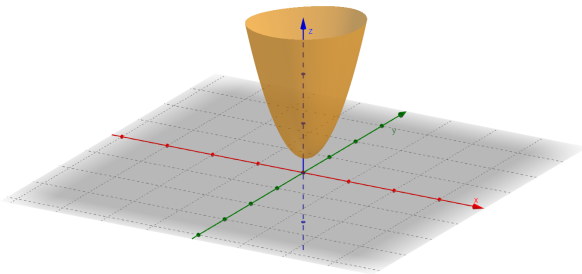
Նամարենք, որ ծիրանի գործն ավարտեցինք, և վերադառնանք մեկից ավելի ապրանքների դեպքին, երբ ունենք ֆունկցիա՝ կախված մի քանի փոփոխականներից՝

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{y-x}$$

Ինչպես այս դեպքի համար ևս մշակենք գործիքներ, որոնցով կկարողանանք գրել x -ի ու y -ի այն արժեքները, որոնցում ֆունկցիայի արժեքն ամենամեծը/ամենափոքրն է:

Սկսենք ֆունկցիան պարկերելուց: Նախ՝ փոփոխականը ոչ թե մեկն է, այլ երկուսը. յուրաքանչյուր (x, y) զույգի համապատասխանում է մեկ արժեք: Ներկաբար ֆունկցիան պարկերելու համար անհրաժեշտ է

- xy -հարթությունը՝ արգումենտների համար
- ավելացրած մի նոր առանցք՝ արժեքները նշելու համար



Այժմ xy -հարթության ամեն մի (x, y) կետի վրա բարձրանալով/իջնելով այնքան, որքան այդ կետում f -ի արժեքն է, կստանանք մի մակերևույթ, որը կլինի $f(x, y)$ -ի գրաֆիկը: Որպես կանոն այն նման է օդում փռված սփռոցի կամ թաշկինակի:

Նկատենք, որ ի տարբերություն մեկ փոփոխականի դեպքի՝ այսպես ունենք

- մեկի փոխարեն երկու առանցք
- երկու ուղղության փոխարեն անվերջ թվով ուղղություններ
- հետևաբար նաև *չկա ամեկ/նվազելու գաղափար*

Մնացածը, կարելի է ասել, նույնն է, ինչ միաչափ դեպքում:

Լավ է մեկ անգամ պեսնել, քան հարյուր անգամ լսել. լավ հասկանալու համար պետք է նայել [տարբեր ֆունկցիաների](#) գրաֆիկներ: Դե իսկ [երկու անգամը](#)՝ պարզապես սքանչելի է:

Նշենք, որ երկուսից ավել փոփոխականների դեպքում գրաֆիկը դժվար է պարկերացնել, դրա համար օգտագործում են տարբեր մեթոդներ (ասենք՝ երրորդ փոփոխականի արժեքից կախված փոփոխում

7.1 $f(x, y)$ -ի գրաֆիկը	87
7.2 Մասնակի ածանցյալ	88
7.3 Շղթայի կանոն	90
7.4 Ուղղությամբ ածանցյալ	92
7.5 Գրադիենտը երկրաչափորեն	93
7.6 Էքստրեմումի խնդիրը բազմաչափ դեպքում	95
7.7 Խնդիրներ	97

կանվանենք՝ z -երի առանցք

հարթության մեջ ձախ/աջ չկա

Էլ ո՞ր առանց [Desmos](#)-ի ու [GeoGebra](#)-ի

կերպի չափսը կամ գույնը, ավելացնում անհմացիա կամ **ժպիտ**): Մենք կբավարարվենք գծելով $f(x, y)$ տեսքի ֆունկցիայի գրաֆիկներ:

7.2 Մասնակի ածանցյալ

Վերադառնանք նախորդ էջում սահմանած $f(x, y)$ **ֆունկցիային**, որում x -ն ու y -ը խնձորի և դեղձի գներն են, իսկ ֆունկցիայի արժեքը՝ մեր եկամուտը:



Նաթգ. *Ինչպե՞ն կհափեք, թե խնձորի արժեքը մի փոքր բարձրացնելիս որքան է փոխվում եկամուտը:*

Կամ որ նույնն է՝ ինչպե՞ն հաշվենք $f(x, y)$ -ի փոփոխությունը x -ը փոխելիս: Դեղձի գինը՝ y -ը պահենք ֆիքսված, և x -ին փոքրիկ աճ տալով՝ շարունակենք ինչպես սովորական ֆունկցիայի ածանցյալի դեպքում:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

եթե f -ը մեկ փոփոխականի է՝ $\frac{df}{dx}$
եթե մի քանի փոփոխականի է՝ $\frac{\partial f}{\partial x}$

Ահա այս թիվը կանվանենք f -ի **մասնակի ածանցյալ** ըստ x -ի և կնշանակենք f_x կամ $\partial_x f$ կամ էլ՝ $\frac{\partial f}{\partial x}$:

Սահմանում 7.1 Եթե հետևյալ սահմանը գոյություն ունի և անվերջ է՝

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

ապա այն կանվանենք f ֆունկցիայի **մասնակի ածանցյալ** ըստ x -ի: Նույն կերպ սահմանում ենք նաև f -ի մասնակի ածանցյալն ըստ y -ի՝

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

f_x -ը ցույց է տալիս f -ի փոփոխման արագությունը միմիայն x -ը փոխելիս, այսինքն՝ երբ շարժվում ենք միայն x -երի ուղղությամբ, իսկ y -ին ձեռք չենք տալիս՝ պահում ենք հաստատուն: Նույն ձևով, բնականաբար, $f_y = f$ -ի արագությունը y -ը փոխելիս՝ x -ը թողնելով անշարժ:

Օրինակ 7.1 Եթե $f(x, y) = x^2 + y^2$, ապա f_x -ը հաշվելիս համարում ենք, որ y -ը հաստատուն թիվ է՝

$$f_x = (x^2)' + (y^2)' = 2x + 0 = 2x$$

իսկ f_y -ը հաշվելիս՝ համարում ենք, որ x -ն է հաստատուն:

$$f_y = (x^2)' + (y^2)' = 0 + 2y = 2y$$

Նկատենք, որ ինչպես սովորական ֆունկցիայի ածանցյալի դեպքում, $f_x(x, y)$ -ն ու $f_y(x, y)$ -ը x -ից և y -ից կախված ֆունկցիաներ են և փարբեր կերպերում ընդունում են փարբեր արժեքներ:

Օրինակ 7.2 Եթե $g(x, y) = 4x^{100}y$, ապա կրկին, նախ կհամարենք y -ը հաստատուն.

$$f_x = 400x^{99}y$$

հետո՝ x -ը.

$$f_y = 4x^{100}$$

$$(hաստատուն \cdot f)' = hաստատուն \cdot f'$$

Փաստորեն երկու փոփոխականի դեպքում ունենք ոչ թե մեկ, այլ երկու արագություն: Եկեք այդ երկու մասնակի արագությունները խմբավորենք և գրենք մեկ վեկտորով՝

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Սրացված վեկտորը կոչվում է f ֆունկցիայի **գրադիենտ** և նշանակվում է $\nabla f(x, y)$: Այն երկու (x -երի և y -ների ուղղությամբ) արագություններից կազմված վեկտորն է, և մասնավորապես վերևի օրինակում՝

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 400x^{99}y \\ 4x^{100} \end{bmatrix}$$



Զգուշացնք. *Գրադիենտը տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ. $\nabla f(\mathbf{x})$ -ը ոչ թե ֆիքսված վեկտոր է, այլ $\mathbf{x} = (x, y)$ -ից կախված վեկտոր-ֆունկցիա:*

Նկատենք, որ չնայած $f(x, y)$ -ի գրաֆիկը գծում ենք 3 առանցք ունեցող եռաչափ տարածության մեջ, նրա գրադիենտը 2-չափանի վեկտոր է: Մովորաբար այն գծում ենք xy -հարթության մեջ, և որքան մեծ լինեն մասնակի ածանցյալները, այնքան ավելի երկար վեկտոր կլինի գրադիենտը՝ փվյալ կետում:

Նման ձևով սահմանում ենք նաև ցանկացած n թվով փոփոխականներից կախված $f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները՝

$$\text{նշանակենք } \mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]$$

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

⋮

$$f_{x_n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + h) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

և նրա գրադիենտը՝

$$\nabla f(\mathbf{x}) = [f_{x_1}(\mathbf{x}) \quad f_{x_2}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_{x_n}(\mathbf{x})]$$

որը այս դեպքում լինում է n -չափանի վեկտոր:



Նաթգ. *Ենթադրենք $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$, որտեղ $\mathbf{a}$ -ն ինչ-որ մի ֆիքսված վեկտոր է: Ի՞նչ կարծում, ո՞րն է ∇f -ը:*

7.3 Շղթայի կանոն

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ունեն գրեթե նույն հարկություններն ու կանոնները, ինչ իրենց մեկ փոփոխականանոց ազգականները: Մասնավորապես, երբ ածանցում ենք ըստ, ասենք, i -րդ փոփոխականի՝ x_i -ի,

$$\begin{aligned}(f \pm g)_{x_i}(\mathbf{x}) &= f_{x_i}(\mathbf{x}) \pm g_{x_i}(\mathbf{x}) \\ (c \cdot f)_{x_i}(\mathbf{x}) &= c \cdot f_{x_i}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

և արտադրյալի դեպքում՝

$$(f \cdot g)_{x_i}(\mathbf{x}) = f_{x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot g_{x_i}(\mathbf{x})$$

Օրինակ 7.3 Նաշվենք $f \cdot g$ -ի մասնակի ածանցյալները, որպեսզի $f(x, y) = 2x^2$ և $g(x, y) = 4x + 6y$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)_x &= 4x \cdot (4x + 6y) + 2x^2 \cdot 4 = 24x^2 + 24xy \\ (f \cdot g)_y &= 0 \cdot (4x + 6y) + 2x^2 \cdot 6 = 12x^2\end{aligned}$$

Իհարկե կարող էինք նաև $f \cdot g$ -ի մեջ տեղադրել f -ի ու g -ի բանաձևերը, բազմապարկել, բացել փակագծերը, հեքո նոր ածանցել, բայց այսպես ավելի կարճ է և հարմար:

Այնուամենայնիվ, այսպեղ կա մի բան, որ չկար մեկ փոփոխականի դեպքում: Երբ ունենք մեկից ավելի փոփոխականներ, հնարավոր է, որ մի փոփոխականը կախված լինի մյուսից, և դրանցից մեկի փոփոխությունը ազդի նաև մյուսի փոփոխության վրա:

Պարկերացրեք՝ ունեք սուպերմարկետ, որի եկամտի ֆունկցիան է՝

$$f(x, y) = 20x^{1.3} + 30y^{2.1}$$

որպեսզի x -ը ցույց է տալիս, թե քանի «Դուրս» է վաճառվել, իսկ y -ը՝ քանի «Գրանդ Քենդի» սառը թեյ:

Բնականաբար, x -ն ու y -ը օղի t ջերմաստիճանից կախված փոխվում են. որքան շոգ է, այնքան ավելի շատ են սառը սուրճ կամ թեյ գնում: Ասենք՝

$$x(t) = 400 + 3t, \quad y(t) = 500 + 2t$$



Նարգ. t -ն մի քիչ փոփոխելիս որքա՞ն կփոխվի $f(x, y)$ -ը:

Կամ այլ կերպ ասած՝

- եթե f -ը կախված է x -ից ու y -ից
- իսկ x -ը (կամ y -ը, կամ երկուսն էլ) կախված են t -ից
- ապա որքա՞ն կփոխվի f -ը t -ն փոխելիս

Նարցին պարասխանելու փաթեթակներից մեկն է $f(x, y)$ -ի մեջ x -ի ու y -ի փոխարեն տեղադրել դրանց արժեքներն՝ արտահայտած t -ով, ապա

ստացվածը պարզապես ածանցել ըստ t -ի.

$$f(x, y) = 20x^{1.3} + 30y^{2.1} = 20(400 + 3t)^{1.3} + 30(500 + 2t)^{2.1} = f(t)$$

Այս տարբերակը ձանձրալի է, և մյուս կողմից՝ ցանկալի կլիներ օգտագործել x -ի ու y -ի փոփոխման արագությունները (t -ից կախված): Փոխարենը կա մի այսպիսի պարզ ու հասարակ կանոն՝

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

կամ որ նույնն է՝

$$f_s = f_x x_s + f_y y_s$$

այսինքն՝ որպեսզի պարզենք, թե t -ից կախված ի՞նչ արագությամբ է փոփոխվում $f(x, y)$ -ը, նայում ենք, թե որքան է նրա արագությունն իր երկու բաղադրիչների՝ x -ի և y -ի նկատմամբ, ապա ստացված թվերը բազմապատկում դրանցից յուրաքանչյուրի ունեցած արագությամբ (t -ի նկատմամբ): Նույն կերպ՝ եթե x -ն ու y -ը կախված լինեին նաև մեկ ուրիշ փոփոխականից, ասենք՝ s -ից, կունենայինք՝

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

կարծես ∂x -երն ու ∂y -ները կրճաթվեն

Եթե օրինակ f -ը կախված լիներ g -ից ու h -ից, դրանցից յուրաքանչյուրը՝ x , y , z -ից, իսկ վերջիններս էլ՝ t -ից ու s -ից, ապա t -ից կախված g -ի փոփոխությունը հաշվելու դեպքում կունենայինք մասնակի ածանցյալների մի այսպիսի շղթա՝

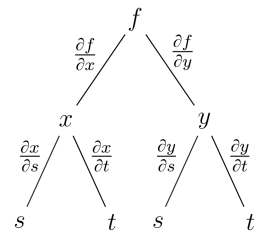
$$\begin{aligned} f_t &= (\text{նայում ենք, թե ումից է կախված } f\text{-ը}) \\ &= f_g g_t + f_h h_t \\ &= (\text{նույնը } g\text{-ի և } h\text{-ի համար}) \\ &= f_g(g_x x_t + g_y y_t + g_z z_t) + f_h(h_x x_t + h_y y_t + h_z z_t) \end{aligned}$$

ինչի համար էլ այս բանաձևը հաճախ անվանում են *շղթայի կանոն*:

Օրինակ 7.4 Ենթադրենք $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $x = t^2 + 3$ և $y = t^3$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} f_t &= f_x x_t + f_y y_t = (2x \cos(x^2 + y^2)) \cdot (2t) + (2y \cos(x^2 + y^2)) \cdot (3t^2) \\ &= 4xt \cos(x^2 + y^2) + 6yt^2 \cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Մնում է միայն տեղադրել x -ի ու y -ի արժեքները:



Օրինակ 7.5 Եթե ունենք միայն մեկ փոփոխական՝

$$z(x) = x^2 + 4x$$

որը կախված է մի ուրիշից՝

$$x(t) = 5t^3 + 2t$$

շղթայի կանոնը դառնում է նույնը, ինչ բարդ ֆունկցիայի ածանցման

կանոնը՝ $z(x(t))' = z'(x(t)) \cdot x'(t)$: Ունենում ենք՝

$$\begin{aligned} z_t &= z_x x_t = (2x + 4) \cdot (15t^2 + 2) \\ &= (2 \cdot (5t^3 + 2t) + 4) \cdot (15t^2 + 2) = 150t^5 + 80t^3 + 60t^2 + 8t + 8 \end{aligned}$$



Նաթգ. Կարող եք ասել այնպիսի ֆունկցիա, որի գրադիենտն է $[2xy \quad x^2 + 4]$:

ասենք՝ f_x -ը f -ի արագությունն է՝ x -երի առանցքով աջ ու ձախ շարժվելիս

7.4 Ուղղությամբ ածանցյալ

Մի քանի փոփոխական (հեղուկաբար նաև՝ մի քանի կոորդինատային առանցքներ) ունենալու լավն այն է, որ կարող ենք քայլել լիքը փարբեր ուղղություններով, ոչ թե միայն աջ կամ ձախ: Մինչդեռ մասնակի ածանցյալները ցույց են տալիս միայն, թե որքան է ֆունկցիայի արագությունը փոփոխվում կոորդինատային առանցքի երկայնքով շարժվելիս՝ մնացած բոլոր կոորդինատները թողնելով ֆիքսած: Իսկ ի՞նչ, եթե ուզում ենք շարժվել ինչ-որ միջանկյալ ուղղությամբ, այսինքն՝ միաժամանակ փոփոխելով մի քանի փոփոխականներ:

Այլ կերպ ասած՝ ի՞նչ կլինի, եթե որոշեք միաժամանակ փոխել և սուրճի, և թեյի գինը, ասենք՝ սուրճը թանկացնեք h դրամով, իսկ թեյը՝ դրանից երկու անգամ ավել, $2h$ դրամով: Եկամտի ֆունկցիայի արագումները այդ դեպքում կդառնան՝

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + h \\ y + 2h \end{bmatrix}$$

այսինքն՝ կշարժվի $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ վեկտորի ուղղությամբ (h չափով): Ուրեմն ֆունկցիայի/եկամտի փոփոխությունը կկազմի՝

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})$$

որը, ինչպես կոսիոսում եք, կբաժանենք փոփոխության չափի՝ $h\|\mathbf{v}\|$ -ի վրա, որպեսզի գտնենք միավոր փոփոխությունը՝

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h\|\mathbf{v}\|}$$

և վերջապես ի՞նչ եք կարծում, ի՞նչ կանենք, որպեսզի ստանանք $\mathbf{v}$ ուղղությամբ ֆունկցիայի փոփոխության արագությունը:

Սահմանում 7.2 Ենթադրենք $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ որևէ ֆունկցիա է, իսկ $\mathbf{v}$ -ն՝ որևէ n -չափանի վեկտոր: Եթե հերկյալ սահմանը գոյություն ունի և անվերջ չէ՝

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h\|\mathbf{v}\|}$$

ապա այն կանվանենք $\mathbf{v}$ -ի ուղղությամբ ածանցյալ $\mathbf{x}$ կետում:

նշանակում են նաև $D_{\mathbf{v}}f$ կամ $\partial_{\mathbf{v}}f$

Նարմարության համար սովորաբար կպահանջենք, որ $\mathbf{v}$ վեկտորի երկարությունը լինի 1: Օրինակ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ վեկտորի փոխարեն կվերցնենք

իրեն՝ բաժանած իր երկարության վրա՝ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$, և այդ դեպքում $\nabla_v f(\mathbf{x})$ -ի արժեքը չի փոխվի, իսկ հայտարարի $\|\mathbf{v}\|$ -ն կվերանա՝

$$\nabla_v f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} \quad (\text{երբ } \|\mathbf{v}\| = 1)$$

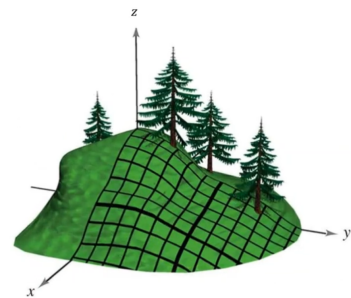


Զգուշացե՛ք. P -ի տարբերություն ∇f -ի՝ $\nabla_v f$ -ը թիվ է, այլ ոչ վեկտոր: Այն նույնպես տարբեր $\mathbf{x}$ -երում ընդունում է տարբեր արժեքներ:



Նաթց. Որո՞նք են $[1 \ 0]$ -ի և $[0 \ 1]$ -ի ուղղությամբ ածանցյալները:

Եթե պարկերացնենք, որ $f(x, y)$ -ի գրաֆիկն, ասենք, սարի մակերևույթն է (լանջերը), ապա xy -հարթության մեջ գտնվող ցանկացած $\mathbf{v}$ ուղղությամբ շարժվելիս սարի լանջով կամ կբարձրանանք, կամ կիջնենք: $\nabla_v f$ -ը ցույց է տալիս, թե որքան կկազմի բարձրանալ/իջնելու չափը, եթե մի փոքր քայլ անենք $\mathbf{v}$ վեկտորի ուղղությամբ:



Նաթց. Կարո՞ղ եք գուշակել, թե ինչպես է $\mathbf{v} = [1 \ 2]$ -ի ուղղությամբ ածանցյալն արտահայտվում ըստ ստորճի ու թեյի գների մասնակի ածանցյալներով:

Վերոնշյալ $\mathbf{v}$ վեկտորի ուղղությամբ ածանցելիս, օրինակ, երկրորդ փոփոխականի արժեքը փոփոխում ենք 2 անգամ ավելի չափով, քան առաջինը, հետևաբար ինչ-որ իմաստով՝ երկրորդի փոփոխման արագությունը պետք է երկու անգամ ավելի մեծ կարևորություն զբաղեցնի, քան առաջինինը: Պարզվում է, որ իրոք, $\mathbf{v}$ վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալը կարող ենք արտահայտել $\mathbf{v}$ -ի բաղադրիչներով և f -ի մասնակի ածանցյալներով հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 7.1 Եթե f -ը դիֆերենցելի է $\mathbf{x}$ կետում և $\|\mathbf{v}\| = 1$, ապա

$$\nabla_v f(\mathbf{x}) = f_{x_1} v_1 + f_{x_2} v_2 + \dots + f_{x_n} v_n$$

այսինքն՝

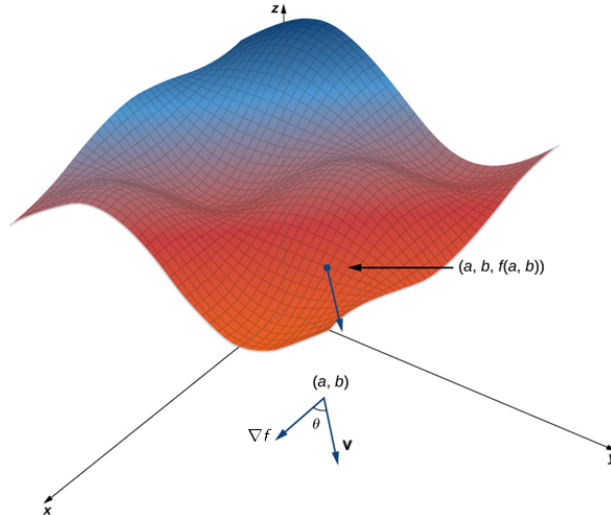
$$\nabla_v f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$



Նաթց. *Խաղալով* P -ի դիրքի և $\mathbf{u}$ -ի ուղղության հետ՝ կարո՞ղ եք պարզել, թե որ ուղղությամբ է ածանցյալն ամենամեծը:

7.5 Գրադիենտը երկրաչափորեն

Եթե պարկերացնենք, որ գտնվում եք սարի վրա, որը Ձեր եկամտի ֆունկցիայի գրաֆիկն է (կամ եթե պարզապես ուզում եք բարձրանալ սարի գագաթը), առաջին բանը, որ կուզեք անել՝ Ձեր կանգնած դիրքից շարժվել հնարավորինս վեր: Այսինքն՝ գրաֆիկասարի յուրաքանչյուր



գրավում ենք (a, b) կետում

կետում բոլոր հնարավոր ուղղություններից կընտրենք այն ուղղությունը, որով քայլելիս ամենաշարք կբարձրանաք, և կքայլեք այդ ուղղությամբ:

Իսկ ինչպե՞ս հասկանանք, թե քվյալ x կետում ո՞ր v ուղղությամբ գնալիս ենք ամենաշարք բարձրանում, կամ որ նույնն է՝ ո՞ր ուղղությամբ է ֆունկցիայի ածանցյալն ամենամեծը:

Ենթադրենք շարժվում ենք v ուղղությամբ և $\|v\| = 1$: Այդ ուղղությամբ ածանցյալը կլինի՝

$$\nabla_v f = \nabla f \cdot v$$

որը, եթե ∇f -ի ու v -ի կազմած անկյունը նշանակենք θ -ով, կդառնա՝

$$\|\nabla f\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f\| \cos \theta$$

Բայց $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, հետևաբար $\nabla_v f$ -ը ամենաշարք կարող է լինել $\|\nabla f\|$, դա էլ միայն այն դեպքում, երբ $\cos \theta$ -ն հավասար լինի 1-ի: Իսկ

$$\cos \theta = 1 \quad \text{նշանակում է} \quad \theta = 0$$

և v -ի ու ∇f -ի ուղղությունները *համընկնում են*: Սրացվեց, որ

ամենադիք վերև ուղղված ուղղությունը

Թեորեմ 7.2 *Գրադիենտը ցույց է տալիս ֆունկցիայի ամենաարագ ամենան ուղղությունը:*

Այսինքն եթե գրավում ենք (a, b) կետում, ապա հաշվելով $\nabla f(a, b)$ -ն ու քայլելով սրացված վեկտորի ուղղությամբ՝ կունենանք հնարավոր ամենամեծ աճը:



Նաթց. Իսկ ո՞րն է ֆունկցիայի ամենաարագ *նվազման* ուղղությունը:



Զգուշացե՛ք. Նշենք, որ ածանցյալները ցույց են տալիս ֆունկցիայի աճել/նվազելը միայն տրված կետի մոտիկ շրջակայքում. ∇f -ի ուղղությամբ շարք մեծ քայլ անելիս ֆունկցիան կարող է չմեծանալ:

Սա երկրաչափորեն մեկնաբանում է, թե ինչ վեկտոր է գրադիենտը՝

- ուղղությունը = ամենակարգավոր բարձրանալու ուղղությունը
- երկարությունը = այդ ուղղությամբ ֆունկցիայի արագությունը

և առանցքային դեր է խաղում օպտիմիզացիայի տեսության ու մեքենայական ուսուցման մեջ:

7.6 Էքստրեմումի խնդիրը բազմաչափ դեպքում

Ճիշտ ինչպես միաչափ դեպքում ածանցյալի միջոցով որոնում ու գտնում էինք, թե որ կետերում է ֆունկցիան ընդունում իր լոկալ իմաստով ամենամեծ/ամենափոքր արժեքները, նույնը կարող ենք անել նաև այս դեպքում՝ ածանցյալի փոխարեն օգտագործելով դրա բազմաչափ տարբերակը՝ ֆունկցիայի գրադիենտը:

Ենթադրենք ունենք որևէ $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիա:

Սահմանում 7.3 Կասենք, որ $f(\mathbf{x})$ -ը $\mathbf{a}$ կետում ընդունում է **լոկալ մաքսիմում** (մինիմում), եթե $\mathbf{a}$ կետին բավականաչափ մոտ՝

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$$

կետերում f -ի ամենամեծ (ամենափոքր) արժեքը $f(\mathbf{a})$ -ն է:

այսինքն՝ $\mathbf{a}$ -ից ամենաշատը δ հեռավորության վրա գտնվող կետերում

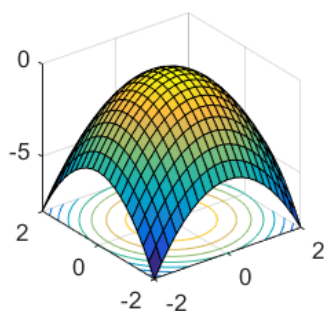
$\mathbf{a}$ կետը համապատասխանաբար կանվանենք ֆունկցիայի **լոկալ մաքսիմումի** (մինիմումի) **կետ**, իսկ այդ երկուսը միասին՝ **Էքստրեմումի կետեր**: Նման ձևով կսահմանենք նաև գլոբալ էքստրեմումի ու կրիտիկական կետի գաղափարները:

Ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, այնպես էլ այստեղ.

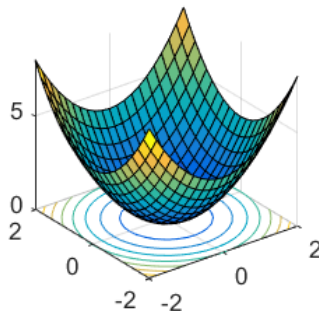
Թեորեմ 7.3 Եթե $\mathbf{a}$ -ն f -ի **լոկալ կամ գլոբալ էքստրեմումի կետ** է և f -ը $\mathbf{a}$ -ում դիֆերենցելի է, ապա

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

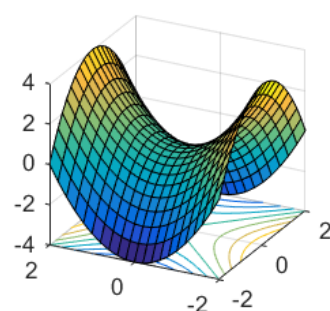
Եվ նորից, այս պայմանը անհրաժեշտ է, բայց ոչ՝ բավարար. կրիտիկական կետ լինելը դեռ չի նշանակում, որ կետը Էքստրեմումի կետ է: Այլ կերպ ասած՝ հնարավոր է, որ որևիցե կետում ֆունկցիայի գրադիենտը լինի $\mathbf{0}$, բայց ֆունկցիան չընդունի ոչ լոկալ մաքսիմում, ոչ լոկալ մինիմում: Այդպիսի կետերը կանվանենք **թամբի կետեր**:



լոկալ մաքսիմում

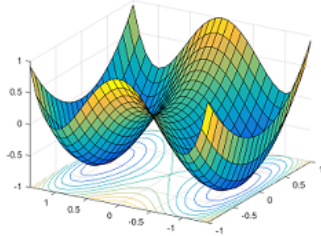


լոկալ մինիմում



թամբի կետ

անգլերեն՝ *saddle point*



փիպիկ ֆունկցիա՝ լիքը կրիպիկական կետերով

որը կոչվում է f -ի *հեսիան*

Սահմանում 7.4 Կասենք, որ $\mathbf{a}$ -ն f ֆունկցիայի թամբի կետ է, եթե այն էքստրեմումի կետ չէ, բայց $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$:

Ինչո՞ւ է կոչվում թամբի կետ: Որովհետև նման է թամբի: Կարող էր կոչվել նաև չիփսի կետ:

Նման կետերում ֆունկցիայի գրադիենտը զրո է (այսինքն՝ բոլոր մասնակի ածանցյալները $= 0$), սակայն մի փոփոխականը ֆիքսած մյուսը փոփոխելիս՝ ֆունկցիան աճում է, իսկ սա ֆիքսելով՝ առաջինը փոփոխելիս՝ նվազում: Արդյունքում սրացվում է, որ ֆունկցիան այդ կետում ոչ մեծագույն արժեք է ընդունում, ոչ փոքրագույն:

Որպեսզի պարզենք, թե $f(x, y)$ -ի կրիպիկական կետերից որոնք են լոկալ էքստրեմումներ, կօգտվենք նմանափիպ մի արդյունքից, ինչ մեկ փոփոխականի ժամանակ: Վերցնենք f -ի մասնակի ածանցյալները՝ $f_x(x, y)$ և $f_y(x, y)$, ու ածանցենք դրանք ևս մեկ անգամ՝ ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի: Ածանցելով

- f_x -ը՝ կստանանք $f_{xx} = (f_x)_x$ և $f_{xy} = (f_x)_y$
- f_y -ը՝ կստանանք $f_{yx} = (f_y)_x$ և $f_{yy} = (f_y)_y$

ընդ որում եթե սրացված ածանցյալներն անընդհատ են, ապա ածանցման հերթականությունը կարևոր չէ՝ $f_{xy} = f_{yx}$:

Այժմ հետևյալ մաթրիցի՝

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

որոշիչը նշանակենք D -ով.

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Եթե մեկ փոփոխականի դեպքում f'' -ի նշանը ցույց էր փալիս՝ արված կրիպիկական կետը էքստրեմումի կետ է, թե ոչ, ապա երկու փոփոխականի դեպքում նույն բանը անում է D -ի նշանը:

Թեորեմ 7.4 Եթե $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ու

- $D > 0$ և $f_{xx} > 0$, ապա $\mathbf{a}$ -ն լոկալ մինիմումի կետ է
- $D > 0$ և $f_{xx} < 0$, ապա $\mathbf{a}$ -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է
- $D < 0$, ապա $\mathbf{a}$ -ն թամբի կետ է

Նկատենք, որ այս դեպքում ևս $D = 0$ կամ $f_{xx} = 0$ դեպքերի մասին թեորեմը ոչինչ չի կարող ասել:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Stewart], 880-883 (գրաֆիկ), 900-905 (մասնակի ածանցյալ), 924-925 (շղթայի կանոն), 933-937 (ուղղությամբ ածանցյալ), 946-949 (էքստրեմումներ) էջերը
- Կենսական մասնակի ածանցյալներն ու գրադիենտը սեփական աչքով
- ըստ ցանկության՝ դիպել Բ. Մալթսեի ներածական փեսա-դասերը շար փոփոխականի ֆունկցիաների մասին
- ինչպես նաև Կ. Քեռյանի խորացված դասախոսություններից 8-րդ և 11-րդ դասերը

7.7 Խնդիրներ

Խնդիր 7.1 Ներկայալ ֆունկցիաները համապատասխանեցրեք իրենց գրաֆիկներին.

ա. $f(x, y) = |x| + |y|$

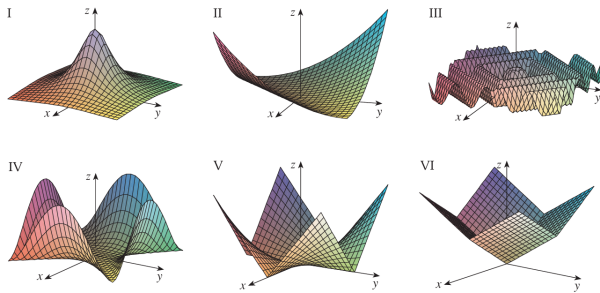
բ. $f(x, y) = |xy|$

գ. $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$

դ. $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

ե. $f(x, y) = (x - y)^2$

զ. $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$



Խնդիր 7.2 Գտեք ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները.

ա. $f(x, y) = 3x - 2y^2$

բ. $f(x, y) = y^7 - 2x^3 + x^2$

գ. $f(x, y) = \sin(xy)$

դ. $f(x, y) = x \cdot \ln y + \frac{x}{y}$

Խնդիր 7.3 Որքա՞ն է $\mathbf{v} = [0.6 \ 0.8]$ վեկտորի ուղղությամբ ածանցյալը $(-1, -1)$ կետում.

ա. $f(x, y) = 3xy$

բ. $f(x, y) = 1 - x^2$

գ. $f(x, y) = e^{x-y}$

Խնդիր 7.4 Սևանա լճի (x, y) կոորդինատներով կետում ջրի խորությունը

$$xy^2 - 6x^2 - 3y^2$$

մեքր է: $(5, 3)$ կետում գրավող «Նորարուս» առագաստանավի նավապետը ցանկանում է շարժվել դեպի մի այնպիսի կետ, որում ջուրն ավելի խոր է: Նրա առաջին օգնականն առաջարկում է նավարկել դեպի հյուսիս, իսկ երկրորդը՝ դեպի հարավ: Օգնականներից որի՞ խորհուրդը պետք է լսի նավապետը:

Խնդիր 7.5 Որո՞նք են ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը (եթե կան).

ա. $f(x, y) = 3xy$

բ. $f(x, y) = x^2 - xy$

գ. $f(x, y) = 2x^2 - x^3 - y^2$

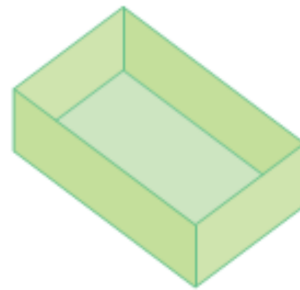
դ. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 3y$

Խնդիր 7.6 Անհրաժեշտ է $(-5, 0)$, $(1, 7)$, $(9, 0)$ և $(0, -8)$ կոորդինատներով կետերում գրավող չորս գլուղերի համար կառուցել հեռուստաաշտարակ: Ո՞ր (x, y) կետում կառուցենք աշտարակը, որպեսզի գլուղերից դրա ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը լինի հնարավորինս փոքր:



Նուշում. Կոորդինատային հարթության մեջ պարկերեք կետերը և գրեք դրանց հեռավորությունը (x, y) կետից: Ինչի՞ է հավասար դրանց քառակուսիների գումարը:

Խնդիր 7.7 Ունենք 12 մ^2 մակերեսով սրվարաթուղթ (ինչպես նաև մկրաք ու սոսինձ), որով այս անգամ ցանկանում ենք պարարասել այսպիսի բաց փուփ (այսինքն առանց վերևի նիստի):



Ամենաշատը որքա՞ն կարող է լինել այդ փուփի ծավալը:



Նուշում. Այս անգամ քառակուսիներ չկան, հետևաբար նշանակենք խորանարդի կողմերը x , y և z : Կարո՞ղ եք z -ն արտահայտել x -ով ու y -ով: Իսկ ծավալը՞:

8.1 Պատահական փորձ

Հաճախ կյանքում հանդիպում ենք այնպիսի իրավիճակների, երբ այս կամ այն գործողության/երևույթի արդյունքը հնարավոր չէ գուշակել, ասենք՝

- ի՞նչ թիվ կընկնի, եթե նետենք գառը
- ո՞ր կողմի վրա կընկնի նետված մետաղադրամը
- ո՞վ կհաղթի, եթե շախմատ խաղաք Լևոն Արոնյանի հետ
- եթե դուրս գանք փողոց ու կանգնեցնենք պատահական անցորդի, ի՞նչ կլինի նրա անունը
- եթե դուրս գանք փողոց ու կանգնեցնենք պատահական անցորդի, որքա՞ն կլինի նրա հասակը
- քանի՞ թույնից կժամանի 62 համարի ավտոբուսը

և այլն: Իրոք, մինչև գառը չնետենք, կանգառում չսպասենք, խաղը չխաղանք՝ չենք կարող ասել հստակ արդյունքը: Չնայած դրան՝ կարող ենք այնուամենայնիվ ինչ-որ ենթադրություններ անել հնարավոր արդյունքի մասին, այսինքն՝ համեմատել, թե հնարավոր ելքերից որը ավելի մեծ շանս ունի տեղի ունենալու, որը՝ ավելի փոքր:

Այլ կերպ ասած՝ թեև հնարավոր չէ հստակ գուշակել արդյունքը, բայց կարելի է խոսել հնարավոր ելքերի *հավանականությունների* մասին: Օրինակ՝

- *գառ նետելիս*
 - հնարավոր է վեց տարբերակ՝ 1, 2, 3, 4, 5 կամ 6
 - քանի որ դրանցից ոչ մեկը մյուսի նկատմամբ առավելություն չունի, ապա բոլոր ելքերն ունեն նույն հավանականությունը
- *մետաղադրամ նետելիս*
 - կա երկու ելք՝ գիր կամ դուշ
 - եթե մետաղադրամը իսկական է, երկու ելքերի դուրս գալու հավանականությունը նույնն է՝ 50%-ով գիր, 50%-ով՝ դուշ
 - հնարավոր է, որ մետաղադրամը կեղծված լինի այնպես, որ այն ավելի հակված լինի ասենք՝ ընկնելու գիր. այդ դեպքում գիր ընկնելու հավանականությունն ավելի մեծ կլինի, քան դուշ ընկնելունը
- *շախմատ խաղալիս*
 - կա երկու ելք՝ հաղթում եք կամ Դուք, կամ Լևոն Արոնյանը
 - գրեթե 100%-անոց հավանականությամբ հաղթողը կլինի Արոնյանը
- *պատահական մարդու անունը հարցնելիս*
 - կան հարյուր հազարավոր հնարավոր ելքեր
 - դրանցից որոշները (ասենք՝ Անի կամ Դավիթ) ավելի հավանական են, քան մյուսները

8.1 Պատահական փորձ	99
8.2 Պատահույթներ	101
8.3 Հավանականային չափ . .	104
8.4 Հատկություններ	107
8.5 Պայմանական հավանականություն	108
8.6 Բայեսի բանաձև	110
8.7 Անկախություն	112
8.8 Երկրաչափական հավանականություն	114
8.9 Խնդիրներ	117

տարբերակներից յուրաքանչյուրը կան-
վանենք *տարրական ելք* կամ պարզա-
պես՝ *ելք*

նկարի ունենք ճշգրիտ հասակը (նանո-
մետրերի ճշտությամբ), ոչ կլորացված

- միջինում 1000 անցորդից մոտ 20-ի անունը կլինի Անահիտ, ևս 17-ինը՝ Արմեն, և այլն

○ *պարահական մարդու հասակը հարցնելիս*

- կան անվերջ թվով ելքեր. մարդու հասակը կարող է լինել, ասենք, (60, 240) սմ միջակայքից ցանկացած թիվ
- ավելի հավանական է, որ հասակները լինեն (160, 180) միջակայքում, քան ասենք՝ (210, 230)

○ *62 համարի ավտոբուսին սպասելիս*

- այս հարցին հավանականությունների փետությունն անգոր է պարասխանել



Տարց. *Ի՞նչ եք կարծում, որքա՞ն է հավանականությունը, որ պարահական վերցված մարդու հասակը լինի 174.12345678912345... սմ:*

անգլերեն՝ *sample space*

Յուրաքանչյուր այսպիսի երևույթ կանվանենք *պարահական փորձ* (= բան, որի ելքը/արդյունքը չգիտենք): Ամեն մի պարահական փորձի համար նրա բոլոր հնարավոր ելքերը կհավաքենք մեկ բազմության մեջ և կանվանենք այն *բոլոր ելքերի բազմություն* կամ *նմուշային տարածություն* (կնշանակենք Ω տառով).

$$\Omega = \{\text{փվյալ պարահական փորձի բոլոր հնարավոր ելքերը}\}$$

անգլերեն՝ *heads և tails*

Օրինակ 8.1 Մերադադրամ նետելը պարահական փորձ է, որի ելքերն են՝

$$\Omega = \{\text{գիր, դուշ}\} = \{\text{Գ, Դ}\} = \{H, T\}$$

Օրինակ 8.2 Ցանկացած ֆուտբոլային խաղ պարահական փորձ է, որի ելքը խաղի հաշիվն է. քանի դեռ խաղը տեղի չի ունեցել, հաշիվը չգիտենք: Եթե պայմանավորվենք օրինակ՝

Փյունիկ 2 – 1 Ալաշկերտ

ելքը նշանակել (2, 1)-ով, բոլոր ելքերը կլինեն՝

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), \dots\}$$

Օրինակ 8.3 Եթե պարահական ինչ-որ պահի դուրս գաք կանգառ և սպասեք, թե քանի րոպեից կգա ավտոբուսը, դա նույնպես կլինի պարահական փորձ:

Եթե համարենք, որ ավտոբուսներն անցնում են ժամը մեկ, հնարավոր է, որ հաջորդ ավտոբուսը գա 45 րոպե անց, հնարավոր է՝ կես ժամ կամ 29.5 րոպե անց, կամ միգուցե՝ π րոպե անց.

$$\Omega = (0, 60)$$

այսինքն՝ π րոպե $\neq 3$ կամ 3.14 րոպե

Նորից, պայմանավորվենք ավտոբուսի գալու ժամանակը չկլորացնել րոպեի ճշտությամբ: Բայց այդ դեպքում (0, 60) միջակայքում կան անվերջ քանակով թվեր, որոնցից ոչ մեկը մյուսների նկատմամբ առավելություն չունի: Իրոք, ինչո՞ւ պիտի ավտոբուսի 35.1908470 րոպե

հետո գալու հավանականությունը ավելի փոքր կամ ավելի մեծ լինի, քան ասենք 35.1908480 կամ 35.1908471 թույլե հետո գալունը:

Մտադրվում է, որ $(0, 60)$ միջակայքում կան անվերջ քանակով թվեր, և յուրաքանչյուրի փաթիլ ունենալու հավանականությունը նույնն է, ինչ մյուսներինը: Ուրեմն (որքան էլ ոչ ինֆուիտիվ թվա) ելքերից ցանկացածի հավանականությունը... 0 է:

Սա **չի նշանակում**, որ ոչ մի ելք հնարավոր չէ, և ավտոբուսը երբեք էլ չի գալու. *հավանականությունը 0 լինել $\neq$ հնարավոր չլինել*: Պարզապես նստել ու սպասել, որ ավտոբուսը կգա հենց ուղիղ 35.1908480 թույլե անց, և ոչ մի վայրկյան, միլիվայրկյան ու նանովայրկյան ուշ կամ շուտ, նման բանի փաթիլ ունենալու շանսերը զրոյական են:

այս մասին ավելի համոզիչ

Նկատենք, որ կախված փորձից՝ ելքերի բազմությունը կարող է փարբեր քանակությամբ փարբեր ունենալ. առաջին օրինակում Ω -ն երկու ելքից էր բաղկացած, երկրորդում (ըստ էության) ու երրորդում՝ անվերջ թվով ելքերից: Ընդ որում եթե երրորդ օրինակում Ω -ն միջակայք էր, ապա երկրորդում Ω -ն բնական թվերի գույգերից բաղկացած բազմություն էր:

Նշենք, որ եթե բազմության փարբերը կարելի է բնական թվերով համարակալել (այսինքն՝ 1-ին փարբ, 2-րդ փարբ, ...), ապա այն անվանում ենք *հաշվելի*, իսկ եթե բազմությունը միջակայք է, ապա այն **չենք կարող** համարակալել և անվանում ենք *անհաշվելի*: Սա է պարզաբան, որ նման միջակայքերի դեպքում ունենք շար-շար մեծ քանակությամբ անվերջ հար ելքեր, որոնցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը 0 է, թեև դրանք բոլորն էլ հնարավոր ելքեր են:

8.2 Պարահույթներ

Եկեք այժմ ներմուծենք հավանականությունը հաշվելու համար անհրաժեշտ որոշակի գործիքներ:

Ենթադրենք ներում ենք զառ.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Կարող ենք, օրինակ, հարցնել՝ արդյո՞ք զառը կընկնի

- 3
- 1 կամ 6
- 4-ից փոքր թիվ
- գույգ թիվ
- պարզ թիվ
- բնական թիվ
- մի որևէ թիվ
- ոչ մի թիվ էլ չի ընկնի

2, 3, 5 պարզ են, 4 ու 6-ը՝ բաղադրյալ, 1-ը՝ ոչ պարզ, ոչ բաղադրյալ



Նարգ. Ինչպե՞ս կպարասխսանե՞իք վերջին երեք հարցերին:

Յուրաքանչյուր դեպքում որոնվող հավանականությունը կնշանակենք $\mathbb{P}$ փառով, ասենք՝

$$\mathbb{P}[1 \text{ կամ } 6] = ?$$

կամ

$$\mathbb{P}[\text{պարզ թիվ}] = ?$$

Որպեսզի էլ ավելի պարզեցնենք գրելաձևը, պայմանավորվենք բառերով «1 կամ 6», «պարզ թիվ», և այլն գրելու փոխարեն ներկայացնել նշված պայմանին բավարարող թվերը *բազմության* միջոցով, այսինքն՝

$$\mathbb{P}[1 \text{ կամ } 6]\text{-ի փոխարեն} \quad \mathbb{P}[\{1, 6\}]$$

և

$$\mathbb{P}[\text{պարզ թիվ}]\text{-ի փոխարեն} \quad \mathbb{P}[\{2, 3, 5\}]$$

քանի որ այսպես ավելի հարմար է: Ցանկության դեպքում կարող ենք նաև այս բազմությունները նշանակել փառերով՝ $A = \{1, 6\}$ և $B = \{2, 3, 5\}$, ու պարզապես գրել՝ $\mathbb{P}[A]$ և $\mathbb{P}[B]$:



Տարց. Ո՞ր բազմությունով կներկայացնենք զույգ լինելու հարցը: Իսկ 3 լինելունը:

անգլերեն՝ *event*

Բոլոր այսպիսի հարց-բազմությունները կանվանենք *պարահույթներ*: Փաստորեն դրանք փարրական ելքերից բաղկացած բազմություններ են, որոնց հավանականությունը փորձում ենք չափել. եթե մեր դեպքում՝ $B = \{2, 3, 5\}$, ապա

$$\mathbb{P}[\{2, 3, 5\}] = \text{հավանականությունը, որ ելքը } 2 \text{ կամ } 3 \text{ կամ } 5 \text{ է}$$

այսինքն՝ որ ելքը B բազմության փարրերից որևէ մեկն է: Ելքի՝ զույգ թիվ լինելու պարահույթն էլ, օրինակ, կլինի $C = \{2, 4, 6\}$ բազմությունը:



Տարց. Ի՞նչ ցույց կդառնա $B \cap C$ պարահույթը: Իսկ $A \cap B$ -ն:

Իրոք, ի՞նչ կլինի, եթե հարենք B և C բազմությունները. կունենանք $B \cap C = \{2\}$, այսինքն՝ այն միակ ելքը, որը և՛ պարզ է (B բազմությունից է), և՛ զույգ (C բազմությունից է).

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[\text{ելքը և՛ } B\text{-ից է, և՛ } C\text{-ից}]$$

կամ այլ ձևով ասած՝ B -ի ու C -ի հարումը այդ երկուսի *միաժամանակ* տեղի ունենալու պարահույթն է:

և իհարկե, եթե $A \cap B = \emptyset$, ապա դրանք միաժամանակ չեն կարող տեղի ունենալ՝

$$\mathbb{P}[A \cap B] = 0$$

Նկատենք, որ երբեմն երկու պարահույթներ կարող են հարում չունենալ, օրինակ՝ A -ն ու B -ն, քանի որ չկա այնպիսի ելք, որը լինի և՛ պարզ, և՛ $\{1, 6\}$ բազմությունից: Այդ դեպքում նրանց հարումը կլինի դարարկ բազմություն (որը նշանակում ենք $\emptyset$ -ով), և կասենք, որ A ու B պարահույթներն *անհամադրելի* են կամ *չհարվող*:

Նույն կերպ B -ի ու C -ի միավորումը՝ $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ այն պարահույթն է, որ զառի թիվը կլինի պարզ կամ զույգ (կամ էլ երկուսը

միաժամանակ)։

$$\mathbb{P}[B \cup C] = \mathbb{P}[\text{ելքը կան } B\text{-ից է, կան } C\text{-ից}]$$

կամ այլ ձևով ասած՝ B -ի ու C -ի հատումը այդ երկուսից *գոնե մեկի* տեղի ունենալու պատահական է։



Զգուշացե՛ք. $B \cup C$ -ում ներառված են նաև այն ելքերը, որոնք միաժամանակ երկուսին էլ պատկանում են։

Վերջապես, եթե օրինակ՝ B -ն այն պատահական է, որ զառի ելքը պարզ է, ապա B^c -ով կնշանակենք դրա հակառակ պատահականը, այսինքն՝ որ զառի ելքը պարզ չէ։

$$\mathbb{P}[B^c] = \mathbb{P}[\text{ելքը } B\text{-ից չէ}]$$

Այս B^c պատահականը կանվանենք B պատահականի *լրացում*։

Նկատենք, որ ցանկացած A պատահական ու իր A^c լրացումը անհամա-
փոփոխելի են՝ $A \cap A^c = \emptyset$, այսինքն՝ չի կարող ելքը A -ին, և՛
չպատկանել A -ին (ասենք՝ A ՝ զույգ լինել, և՛ զույգ չլինել)։



Նախ. B^c -ն կասեք $A \cup A^c$ պատահականի մասին։ Ո՞ր բազմությունն է
այն, և որքա՞ն պիտի լինի նրա հավանականությունը։

Յուրաքանչյուր պատահական փորձի ժամանակ մեզ հետաքրքրող բոլոր
պատահականները կհավաքենք մեկ բազմության մեջ (որը կնշանակենք
 $\mathcal{F}$ -ով) և այն կանվանենք *պատահականների տարածություն*։

Նկատենք, որ այս $\mathcal{F}$ -ի փաթեթը բազմություններ են, այսինքն $\mathcal{F}$ -ն
ինքը բազմություններից բաղկացած բազմություն է։ Քանի որ բոլոր
հնարավոր ելքերի Ω բազմությունը նույնպես պատահական է, ապա
 $\Omega \in \mathcal{F}$ ։

Ընդհանուր առմամբ ինչպիսին էլ լինի մեր $\mathcal{F}$ -ը, այն պետք է պարունակի
ցանկացած պատահականների հատումը, միավորումը և լրացումը։

1. Ω -ն և $\emptyset$ -ը պատահականներ են՝ $\Omega \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. ցանկացած A պատահականի լրացումը ևս պատահական է՝ $A^c \in \mathcal{F}$
3. ցանկացած թվով պատահականների հատումն ու միավորումը ևս
պատահական է՝

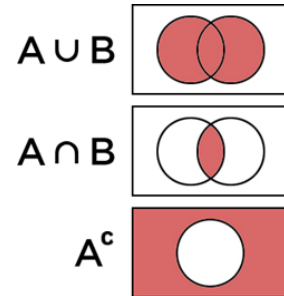
- $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$
- $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$
- նույնիսկ անվերջ թվով՝ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

և

- $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$
- նույնիսկ անվերջ թվով՝ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Կարճ ասած՝ հանգիստ կարող ենք ցանկացած գործողություն կատարել
պատահականների հետ, և արդյունքում ստացվածը կրկին անվանել
«պատահական»։

հարմար է պատահականները ներկայաց-
նել այսպիսի շրջաններով



անվերջն՝ *event space*

բոլորիս փաթեթը կա փոփոխությունով լցված
փոփոխական $\mathcal{F}$ -ը հենց այդ մեծ փոփոխական
է



Նաթգ. Ենթադրենք B -ն զատի թվի պարզ, իսկ C -ն՝ զույգ լինելու պատահական է: Կարող եք B -ով ու C -ով արտահայտել պարզ, սակայն ոչ զույգ լինելու պատահական:

այդ դեպքում $\mathcal{F}$ -ը կլինի Ω -ի բոլոր ենթաբազմություններից բաղկացած գերբազմությունը

Մինչև առաջ անցնելը նշենք, որ թեև միշտ կարող ենք հնարավոր ելքերից կազմված բոլոր բազմությունները համարել պատահականներ ու անցնել առաջ, բայց երբեմն հարմար է լինում պաշտոնապես պարահոյթներ համարել միայն այն ելքերից բաղկացած բազմությունները, որոնք հեղաքրքիր են Կոլմոյորի տեսանկյունից:

Օրինակ 8.4 Պարկերացրե՛ք զատ ենք նետում, և եթե ընկնում է զույգ, ապա հաղթում ենք, եթե կենտ՝ պարտվում: Այս դեպքում մեզ հեղաքրքիր են հետևյալ երկու պատահականների տեղի ունենալ-չունենալը՝

$$W = \{2, 4, 6\}, \quad L = \{1, 3, 5\}$$

և բացարձակապես հեղաքրքիր չէ իմանալ՝ զատի վրայի թիվը պահի՞ք է, բաղադրյալ է, 4-ից մեծ է, թե՛ 3-ից փոքր:

Ուրեմն կարող ենք «անպերք փոքրակներն» աղբը նետել ու որպես պատահականներ վերցնել միայն՝

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$$

Օրինակ 8.5 Իսկ եթե ասենք՝ նարդի խաղանք, և ինչ-որ պահի միակ հնարավոր թույլատրելի քայլը լինի 2-ը, ապա նորից փոքրություն չկա՞ զառը կընկնի պարզ թիվ, թե բաղադրյալ. կարևոր է միայն 2 կընկնի՞, թե՛ չի ընկնի:

Այսինքն՝ կարող ենք բավարարվել միայն $\{2\}$ պատահականով և վերցնել՝

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$$

Բարեբախտաբար, խնդիրներ լուծելիս պարտադիր չէ ամեն անգամ նշել, թե որն է $\mathcal{F}$ -ը. ավելորդ ֆորմալիզմից խուսափելու համար կարող ենք համարել, որ ելքերից կազմված ցանկացած բազմություն պատահական է, և լուծել խնդիրը: Ավելի նուրբ դեպքերում, սակայն, սա կարող է հանգեցնել [պարադոքսների](#):

8.3 Հավանականային չափ

Բավական երկար ներածությունից հետո անցնենք մեր գլխավոր հերոսին՝ $\mathbb{P}$ -ին, որի միջոցով չափելու ենք բոլոր այն պատահականների տեղի ունենալու հավանականությունները, որոնց մասին խոսեցինք վերևում: Անվանենք այն *հավանականային չափ*:

Ենթադրենք՝ կրկին նետում ենք զառը: Կհամարենք, որ ամենամեծ («100%-անոց») հավանականությունը 1 է՝

$$\mathbb{P}[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = 1$$

և քանի որ բոլոր 6 ելքերն ունեն միևնույն տեղի ունենալու հավանականությունը, դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը կլինի $\frac{1}{6}$,

անգլերեն՝ *probability measure*

նույն ինքը՝ $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

$$\mathbb{P}[1] = \mathbb{P}[2] = \dots = \mathbb{P}[6] = \frac{1}{6}$$

իսկ օրինակ գույգ թիվ ընկնելունը՝

$$\mathbb{P}[\{2, 4, 6\}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Նման դեպքերում, երբ ելքերից ոչ մեկի հավանականությունը մյուսից չի փոքրանում, ասում ենք, որ բոլոր ելքերը *հավասարահավանական* են: Ինչպես վերևում տեսանք, հավասարահավանական դեպքում ցանկացած A պատահույթի հավանականությունը հավասար է

անգլերեն՝ *equiprobable*

$$\mathbb{P}[A] = \frac{A\text{-ի փարբերի թիվը}}{\text{բոլոր ելքերի թիվը}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Օրինակ 8.6 Տիմա միաժամանակ նետենք երկու զառ: Բոլոր փարբերակները միասին կունենանք $6 \cdot 6 = 36$ հնարավոր ելք.

$$\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 6\}$$

Քանի որ դրանցից ցանկացածի տեղի ունենալու հավանականությունը նույնն է, ապա յուրաքանչյուր (x, y) ելքի հավանականությունը կլինի՝

հերթականությունը կարևոր է. $(3, 5)$ և $(5, 3)$ ելքերը **նույնը չեն**

$$\mathbb{P}[(x, y)] = \frac{1}{36}$$

իսկ օրինակ՝ երկուսի վրա էլ նույն թիվը լինելունը՝

$$\mathbb{P}[\{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Իսկ ի՞նչ եթե զառ նետելու փոխարեն դուրս գայինք փողոց, մոտենայինք պատահական մարդու ու հարցնեինք, թե վերջինս ձախլի՞կ է, թե՞ աջլիկ:



Նաթգ. Արդյո՞ք այս դեպքում ևս հավանականությունը կլինե՞ր $\frac{1}{2}$:

Քանի որ մարդկության ընդամենը 10%-ն է ձախլիկ, շատ ավելի (մասնավորապես՝ 9 անգամ ավելի) հավանական է, որ պատահական վերցրած մարդը կլինի աջլիկ, քան ձախլիկ: Այսինքն՝ ձախլիկ մարդու մոտենալու հավանականությունը ոչ թե $\frac{1}{2} = 0.5$ է, այլ մոտավորապես $\frac{1}{10} = 0.1$:

Ուրեմն այս դեպքում ունենք երկու ելք՝

$$\Omega = \{\mathcal{Q}, \mathcal{A}\}$$

որոնք հավասարահավանական չեն, այլ

$$\mathbb{P}[\mathcal{Q}] = \frac{1}{10} = 0.1, \quad \mathbb{P}[\mathcal{A}] = \frac{9}{10} = 0.9$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե պատահական փորձն ունի վերջավոր քանակով հնարավոր ելքեր (ասենք՝ n հատ), ապա կարող ենք այդ

ելքերը համարակալել՝

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

մի ելքը կարող է շար հավանական լինել, մի ուրիշը՝ պակաս հավանական

և քանի որ այդ ելքերի հավանականությունները կարող են տարբեր լինել, յուրաքանչյուր k -րդ ելքի հավանականությունը կնշանակենք p_k -ով՝

$$p_1 = \mathbb{P}[\omega_1], \quad p_2 = \mathbb{P}[\omega_2], \quad \dots, \quad p_n = \mathbb{P}[\omega_n]$$

Բնականաբար, բոլոր ելքերի հավանականությունները գումարելով ստանալու ենք 1՝

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

A -ն կարող է բաղկացած լինել միայն մեկ ելքից՝ $A = \{\omega_k\}$

Փաստորեն մեր $\mathbb{P}$ -ն մի այնպիսի ֆունկցիա է, որը վերցնում է պարահույթն ու վերադարձնում թիվ՝

$\mathbb{P}[A] = A$ պարահույթի տեղի ունենալու հավանականությունը

ընդ որում՝ այն, թե ինչ թիվ է $\mathbb{P}$ -ն վերադարձնում, կախված է խնդրից:

Նաթ. Մոնթի խաղի օրինակ է հավանականությունը (աչքաչափով), որ պարահույթն վերցված մարդու անունը



- $A_1 =$ սկսվում է «Բ» տառով
- $A_2 =$ սկսվում է «Բ» տառով
- $A_3 =$ վերջանում է «Բ» տառով

Ինչ կասեք $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2]$ -ի մասին: Իսկ $\mathbb{P}[A_1 \cup A_3]$ -ի:

Փորձենք պարահույթն այս հարցերին: Նախ մոնթի խաղի գնահատենք յուրաքանչյուր պարահույթի հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[A_1] = 0.001, \quad \mathbb{P}[A_2] = 0.01, \quad \mathbb{P}[A_3] = 0.05$$

Ինչ է նշանակում $A_1 \cup A_2$: Սա այն պարահույթն է, երբ տեղի ունեն A_1 -ից ու A_2 -ից գոնե մեկը, այսինքն՝ մարդու անունը սկսվում է կամ «Բ» տառով, կամ «Բ»: Ներկայացնենք

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] = 0.06$$

Իրոք, քանի որ մարդու անունը չի կարող միաժամանակ սկսվել այս երկու տառերով (այսինքն A_1 -ն ու A_2 -ը չեն հատվում), դրանց միավորման հավանականությունը հավասար կլինի դրանց առանձին-առանձին հավանականությունների գումարին:

քանի՞ անուն գիրք «Բ» տառով սկսվող

Մյուս կողմից՝ $A_1 \cup A_3$ -ը այն պարահույթն է, որ մարդու անունը սկսվում է «Բ»-ով *և/կամ* վերջանում է «Բ»-ով: Այս անգամ արդեն A_1 -ն ու A_3 -ը հատվում են, անհամադրելի չեն, նույնիսկ ավելին՝ «Բ»-ով սկսվող գրքերն անհամադրելի վերջանում է «Բ»-ով, և A_1 պարահույթի տեղի ունենալուց ինքնըստինքյան հետևում է, որ A_3 -ը նույնպես տեղի ունի: Ուրեմն

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_3] = \mathbb{P}[A_3] = 0.05 \quad \text{այլ ոչ թե} \quad 0.051$$

Այսպիսով երկու պարահույթների միավորման հավանականությունը *ոչ միշտ* է հավասար դրանց հավանականությունների գումարին, քանի որ այդ պարահույթները կարող են հատվել (միաժամանակ երկուսն էլ տեղի

ունենալ): Իսկ եթե դրանք անհամադրելի են (մեկը մյուսին չեն օգնում կամ խանգարում), այդ դեպքում արդեն $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2]$:

Ամփոփելով մինչ այս պահը մեր պայմանավորվածությունները՝ ձևակերպենք $\mathbb{P}$ -ի ֆորմալ սահմանումը.

Սահմանում 8.1 *Կասենք, որ $\mathbb{P}$ ֆունկցիան հավանականային չափ է, եթե*

1. *ցանկացած $A \in \mathcal{F}$ պարահույթի համար $\mathbb{P}[A] \geq 0$*
2. *$\mathbb{P}[\Omega] = 1$*
3. *ցանկացած $A_1, A_2, \dots$ չհատվող պարահույթների համար*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$$

$$\text{այսինքն՝ } \mathbb{P}\left[\bigcup_n A_n\right] = \sum_n \mathbb{P}[A_n]:$$

նույնիսկ անվերջ հար A_n -երի

Ω -ն, $\mathcal{F}$ -ը և $\mathbb{P}$ -ն միասին կոչվում են նաև *հավանականային տարածություն* կամ *եռյակ*՝ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

8.4 Հավելություններ

Այժմ արդեն պարհասք ենք ծանոթանալու, թե ինչպես հաշվել տարբեր պարահույթների հավանականությունները:



Հարց. *Որքա՞ն է անձրև զալու հավանականությունը, եթե հայրնի է, որ անձրև չզալունը 0.3 է:*

Բնականաբար, եթե հայրնի է որևէ A պարահույթի հավանականությունը, ապա կարող ենք հաշվել նաև դրա լրացման հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$$

Մասնավորապես, երկու անհամադրելի պարահույթների համար, այսինքն $\emptyset$ դարարկ պարահույթի հավանականությունը՝

$$\mathbb{P}[\emptyset] = 1 - \mathbb{P}[\Omega] = 0$$

ինչպես և պերք է լինել:



Հարց. *Ո՞ր հավանականությունն է ավելի մեծ՝ զատի զո՞ւյգ թիվ ընկնելունը, թե՞ 4-ի բաժանվող թիվ ընկնելունը:*

Եթե ասենք 4-ի բաժանվելու պարահույթը նշանակենք A -ով, իսկ զույգ լինելունը՝ B -ով.

$$A = \{4\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$$

ապա A բազմության ցանկացած տարր կպարկանի նաև B բազմությանը, այսինքն A -ն կլինի B -ի ենթաբազմություն՝ $A \subset B$: Հետևաբար A -ի հավանականությունը չի կարող մեծ լինել B -ինից.

$$\text{եթե } A \subset B, \quad \text{ապա } \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

պարահույթները երկրաչափորեն նկարելիս սա անմիջապես երևում է. եթե մի պարկերն ընկած է մյուսի մեջ, ապա այն ավելի փոքր է

Ինչպես գիտենք, եթե պատահույթները չեն հապվում (անհամադրելի են), ապա դրանցից որևէ մեկի տեղի ունենալու հավանականությունը հավասար է դրանց հավանականությունների գումարին: Իսկ ի՞նչ, եթե դրանք հապվում են:



Նաթ. Թբիլիսիում սպորտդների մոտ 47%-ը խոսում է անգլերեն, 5%-ը՝ հայերեն, իսկ 2%-ը՝ և՛ անգլերեն, և՛ հայերեն: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ պատահական հանդիպած մարդու հետ կկարողանաք հաղորդակցվել:

Քանի որ անգլերեն և հայերեն խոսողների բազմությունները հապվում են, 47%-ին 5% գումարելու դեպքում որոշ մարդկանց (բնակչության 2%-ին) մեկի փոխարեն երկու անգամ կհաշվենք: Ներկառար պետք է գումարելուց հետո հանենք այդ 2%-ը, և արդյունքում կստանանք՝ $47\% + 5\% - 2\% = 50\%$:

Այսինքն եթե ունենք որևէ երկու A և B պատահույթներ, դրանցից որևէ մեկի տեղի ունենալու հավանականությունը՝

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

հավասար է առանձին հավանականությունների գումարից հանած դրանց հապման հավանականությունը: Այս կանոնը կոչվում է *կցման-արտաքսման սկզբունք*:



Մասնավորապես այս սկզբունքից հետևում է, որ

$$\mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

ցանկացած A և B պատահույթների համար: Ավելին, սա ճիշտ է ցանկացած թվով պատահույթների համար՝

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_n A_n\right] \leq \sum_n \mathbb{P}[A_n]$$

ընդ որում հավասարություն տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ A_n -երը ոչ մի ընդհանուր կետ չունեն:



Նաթ. Կարող եք դուրս բերել կցման-արտաքսման սկզբունքը երեք պատահույթների համար՝ A , B , C :

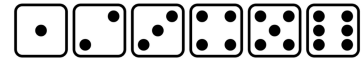
8.5 Պայմանական հավանականություն

Ենթադրենք ներել ենք զառն, ու ընկել է ինչ-որ թիվ:

Նաթց 1. Որքա՞ն է հավանականությունը, որ ընկած թիվը զույգ է:

Դե քանի որ կա 6 հնարավոր ելք, որոնցից ընդամենը 3-ն են զույգ՝
 $A = \{2, 4, 6\}$, հավանականությունը կլինի

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Նաթց 2. Որքա՞ն է հավանականությունը, որ ընկած թիվը զույգ է, եթե հայրնի է, որ այն պարզ է:

Եթե ինչ-որ կերպ գիտենք, որ զառի թիվը պարզ է, նշանակում է՝ այն չի կարող լինել 1, 4 կամ 6: Նեղակալաբար եթե այս երեքը ջնջենք ելքերի բազմությունից, րակը կմնա *երեք* հնարավոր ելք՝ $B = \{2, 3, 5\}$: Այս երեքից միայն մեկն է զույգ, հեղակալաբար հավանականությունը կլինի $\frac{1}{3}$:



Այսպիսով երկրորդ դեպքում, քանի որ կողքից հավելյալ տեղեկություն ունենք, պապասխանը փոխվեց: Պապճառն այն է, որ զառի թվի պարզ լինելու պայմանը նշանակում է՝ հնարավոր են միայն այն ելքերը, որոնք պատկանում են B բազմությանը: Ուրեմն այդ պայմանի ներքո մեզ մնում են միայն $A \cap B$ բազմության մեջ եղած՝ և՛ զույգ, և՛ պարզ ելքերը:

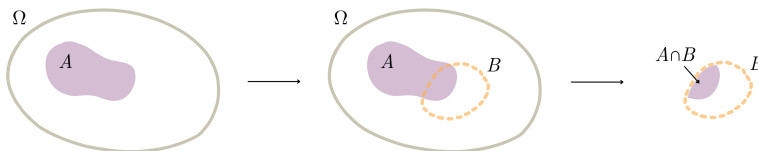
Սահմանում 8.2 Երկու A և B պատահույթների համար

$$\mathbb{P}[A | B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

թիվը կանվանենք A -ի (պայմանական) **հավանականություն B պայմանով**:

եթե $\mathbb{P}[B] \neq 0$

Այլ կերպ ասած՝ եթե ունենք հավելյալ տեղեկություն/պայման, որ B պատահույթը տեղի ունի, ապա փոխանակ նայենք, թե բոլոր Ω ելքերից որո՞նք են A -ի մեջ, Ω -ն շարքում ենք, վերցնում միայն B -ն, և նայում, թե B -ի քարերից որո՞նք են A -ի մեջ:



$\mathbb{P}[A | B]$ թիվը ցույց է քալիս $A \cap B$ -ի մասնաբաժինը B -ի մեջ, այսինքն՝ B -ի որքա՞ն մասն է կազմում A -ի հեղ ունեցած հաղումը:

քանի՞ քոկոսը

Զառերի օրինակում՝

$$\mathbb{P}[\text{զույգ} | \text{պարզ է}] = \mathbb{P}[A | B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[\{2\}]}{\mathbb{P}[\{2, 3, 5\}]} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Օրինակ 8.7 Ներել ենք երկու զառ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ առաջին զառն ընկել է 2, եթե զառերի զումարը 5-ից մեծ չէ:

Առհասարակ հնարավոր է 36 հապ ելք, որոնցից միայն 6-ի դեպքում է առաջին զառն ընկնում 2: Բայց քանի որ *գիտենք*, որ զառերի գումարը 5 է, հնարավոր ելքերը լինում են ընդամենը 10-ը.

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Այս 10-ից միայն 3-ի դեպքում է առաջին զառը ընկնում 2, ուստի պայմասխանն է $\frac{3}{10} = 0.3$:



Նաթք. Որքա՞ն է հավանականությունը, որ *Թրիխսի*ում բնակվող պարսիսական վերցված հայր խոսում է անգլերեն:

8.6 Բայեսի բանաձև

Ենթադրենք A -ն ու B -ն զրոյից մեծ հավանականությամբ որևէ պարահայտություններ են: Եթե գիտենք B պայմանի դեպքում A -ի տեղի ունենալու հավանականությունը, ինչպե՞ն ստանանք հակառակը՝ A պայմանի դեպքում B -ի տեղի ունենալու հավանականությունը:

Գրենք $\mathbb{P}[B | A]$ -ի բանաձևը.

$$\mathbb{P}[B | A] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A | B] \cdot \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

պարկերավոր ապացույց

Հիասթափ. A -ի ու B -ի տեղերը փոխվեցին: Ստացվեց, որ $\mathbb{P}[B | A]$ -ն արտահայտեցինք $\mathbb{P}[A | B]$ -ով: Այս արդյունքը կոչվում է *Բայեսի բանաձև*:

Օրինակ 8.8 Բնության մեջ հրդեհներ տեղի են ունենում հազարից մեկ, ենթադրենք՝ 0.01 հավանականությամբ, ընդ որում դրանցից 90%-ում առաջանում է տեսանելի ծուխ: Մյուս կողմից՝ խորոված անելիս նույնպես ծուխ է առաջանում, և օրը ցերեկով ծուխ տեսնելու հավանականությունը այնքան էլ ցածր չէ, ասենք՝ 10%:

Նայում եք հեռուն և տեսնում ծուխ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ Ձեր տեսածը հրդեհ է: Նախ եթե F -ով նշանակենք հրդեհ, իսկ S -ով՝ ծուխ լինելու հավանականությունը, կունենանք՝

$$\mathbb{P}[F] = 0.01, \quad \mathbb{P}[S] = 0.1$$

և $\mathbb{P}[S | F] = 0.9$: Ուրեմն ըստ Բայեսի բանաձևի՝

$$\mathbb{P}[F | S] = \frac{\mathbb{P}[S | F] \cdot \mathbb{P}[F]}{\mathbb{P}[S]} = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.1} = 0.09$$

Անհանգստանալու կարիք չկա. ամենայն հավանականությամբ ծուխը խորովածից է:

Քննարկենք ևս մի հեղաքրքիր խնդիր: Պարկերացրեք՝ ունենք մի համալսարան, որպեղ

- կանանց 10%-ն է ձախլիկ
- փղամարդկանց 15%-ն է ձախլիկ
- ուսանողների $\frac{3}{5}$ -ը կին են, մյուսները՝ փղամարդ

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ պարահական վերցված ուսանողը կլինի ձախլիկ:

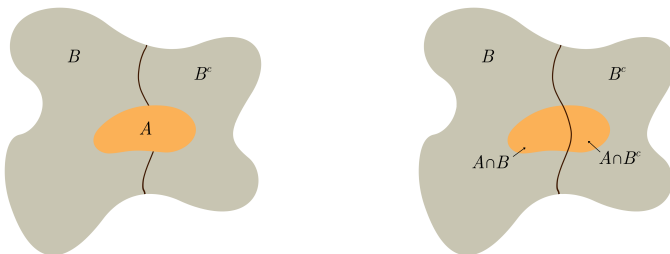
Նախ A -ով նշանակենք կին լինելու պարահայտը, իսկ B -ով՝ ձախլիկ լինելունը: Այդ դեպքում ձախլիկներին կարող ենք բաժանել երկու չհատվող մասերի՝

B^c -ն կլինի փղամարդ լինելունը

$$\{\text{ձախլիկներ}\} = \{\text{կին ձախլիկներ}\} \cup \{\text{փղամարդ ձախլիկներ}\}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c]$$



Այսպեղ արդեն օգտվելով պայմանական հավանականությունից՝

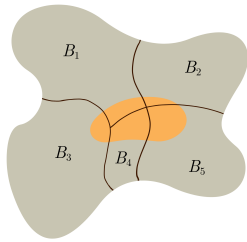
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c] \\ &= \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A | B] + \mathbb{P}[B^c] \cdot \mathbb{P}[A | B^c] \\ &= \frac{3}{5} \cdot 0.1 + \frac{2}{5} \cdot 0.15 = \frac{3}{25} = 0.12 \end{aligned}$$

և խնդիրը լուծված է: Մտացվածը կոչվում է *լրիվ հավանականության բանաձև*.

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A | B] + \mathbb{P}[B^c] \cdot \mathbb{P}[A | B^c]$$

Ինչո՞ւ «լրիվ»: Որովհետև կարծես բոլոր դեպքերը բաժանում ենք երկու ենթադեպքերի, յուրաքանչյուրում հաշվում, ապա համապարասխան կշիռներով (դեպքերի հավանականություններով) բազմապարկելով ու գումարելով ստանում լրիվ հավանականությունը:

ըստ էության՝ ենթադեպքերի գծային զուգակցությունն է



Անշուշտ, նույնը ճիշտ է նաև, եթե բաժանենք ոչ թե երկու, այլ երեք և ավելի չհատվող ենթադեպքերի:

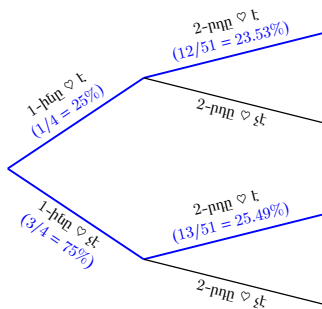
Թեորեմ 8.1 Եթե A պատահույթը կարելի է բաժանել մի քանի չհատվող պատահույթների միջև՝ $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots$, ապա

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] \cdot \mathbb{P}[A | B_1] + \mathbb{P}[B_2] \cdot \mathbb{P}[A | B_2] + \dots$$



Զգուշացե՛ք. Բանաձևը ճիշտ է, միայն եթե B_n -երը **չեն հատվում**:

սրբերը 13 հապ են



Օրինակ 8.9 Ունենք 52 խաղաթուղթ: Պատահականորեն վերցնում ենք դրանցից մեկը, փակը մնում է 51 հապ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ եթե վերցնենք ևս մեկ խաղաթուղթ, այն կլինի սիրտ:

Նշանակենք՝

A = երկրորդ հանածը սիրտ է

B = առաջին հանածը սիրտ է

Առաջին խաղաթուղթը հանելուց հետո

- եթե հանվածը սիրտ է, ապա մնում է ևս 12 սիրտ
- եթե հանվածը սիրտ չէ, ապա մնում է 13 սիրտ

այսինքն՝ $\mathbb{P}[A | B] = \frac{12}{51}$ և $\mathbb{P}[A | B^c] = \frac{13}{51}$:

Մյուս կողմից $\mathbb{P}[B] = \frac{13}{52}$, հետևաբար լրիվ հավանականությունն է՝

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A | B] + \mathbb{P}[B^c] \cdot \mathbb{P}[A | B^c] = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4}$$

Կարող էիք պատասխանը ստանալ այլ եղանակով:

8.7 Անկախություն

Վերևում հաշվեցինք զառը կամ մետաղադրամը նետելիս սրացվող փարբեր պատահույթների հավանականություններ: Իսկ ի՞նչ, եթե կափարենք այսպիսի փորձ. միաժամանակ նետենք զառը և մետաղադրամը: Որևէ ազդեցություն կունենա՞ր արդյոք զառի ընկած թիվը մետաղադրամի արդյունքի վրա: Կփոխվի՞, ասենք, զառի 3 ընկնելու հավանականությունը, եթե իմանաք, որ մետաղադրամը գիր է ընկել: Իհարկե ոչ. զառը նույնիսկ փեղյակ չէ, որ Դուք իրենից բացի մետաղադրամ եք նետել, և դրանցից մեկը մյուսի վրա ոչ մի ազդեցություն չունի:

Նույն կերպ իրարից կախում չունեն

- մետաղադրամների երկու փարբեր նետումները
- իրար հետևից կամ թեկուզ միաժամանակ նետված երկու զառերը
- միևնույն զառի առաջին և երկրորդ նետումները
- պատահական վերցված երկու մարդկանց հասակները

և այլն: Այլ կերպ ասած՝ դրանք անկախ են:

Մահմանում 8.3 Կասենք, որ A և B պարահույթներն **անկախ** են,

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

կամ համարժեքորեն՝

$$\mathbb{P}[A | B] = \mathbb{P}[A]$$

երկու կողմը բաժանենք $\mathbb{P}[B]$ -ի

Երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ A պարահույթի համար B -ն եղած-չեղած մի հաշիվ է. A -ի հավանականությունը B պայմանի դեպքում նույնն է, ինչ առանց B պայմանի:

Օրինակ 8.10 Վերջին անգամ ներենք երկու գառ: Նշանակենք՝

A = առաջին գառը գույգ է

B = երկրորդ գառը կենար է

Պարզենք, թե որքան է $A \cap B$ պարահույթի հավանականությունը:

Նախ $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \frac{3}{6} = 0.5$: Քանի որ գառերի ելքերն իրարից անկախ են, ապա հավանականությունը, որ միաժամանակ առաջին գառը կլինի գույգ, իսկ երկրորդը՝ կենար, հավասար է

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.25$$



Նախք. Ներսիսն ենք 100 գառ: Որքա՞ն է հավանական, որ բոլորը կընկնեն գույգ: Բսկ որ գոնե մեկը կընկնի կե՞նար:

Օրինակ 8.11 Մոտենում եք երկու պարահական անցորդի, հարցնում, թե նրանք որ ամսին են ծնվել, և եթե այն համընկնում է Ձեր ծնված ամսվա հետ, ապա ուրախանում եք: Որքա՞ն է հավանական, որ երկու հոգուց գոնե մեկի ամիսը կհամընկնի Ձերինի հետ:

Եթե A_1 -ով նշանակենք առաջին, իսկ A_2 -ով՝ երկրորդ անցորդի ծննդյան ամսվա համընկնելը Ձեր ամսվա հետ, ապա

- A_1 -ն ու A_2 -ը կլինեն անկախ
- ընդ որում $\mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{12}$ և $\mathbb{P}[A_2] = \frac{1}{12}$

Մեր նպատակն է հաշվել A_1 -ից ու A_2 -ից գոնե մեկի փեղի ունենալու հավանականությունը, հետևաբար՝

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2] &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \\ &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2] \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12^2} = \frac{23}{144} \approx 0.16 \end{aligned}$$

Նկատենք նաև, որ եթե երկու A ու B պարահույթներ անկախ են, ապա նրանց լրացումները՝

- A^c -ն ու B -ն
- A^c -ն ու B^c -ն
- A -ն ու B^c -ն

ասենք 1-ին գառի գույգ լինելն ու 2-րդի կենար լինելը

նույնպես անկախ են: Այսինքն եթե A -ի տեղի ունենալը չի ազդում B -ի հավանականության վրա, ապա բնականաբար A -ի տեղի չունենալը նույնպես չի ազդում B -ի վրա:

Նման ձևով, եթե մի պատահույթի տեղի ունենալուց հետևում է, որ մյուսը չի կարող տեղի ունենալ (այսինքն դրանք չեն հապվում՝ անհամատեղելի են), ապա այդ երկուսի միջև ինչ-որ կապ կա, և դրանք անկախ չեն: Ներկաբար,

և եթե $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] \neq 0$

Թեորեմ 8.2 *Եթե A և B պատահույթներն անկախ են, ապա նրանք չեն կարող անհամատեղելի լինել:*



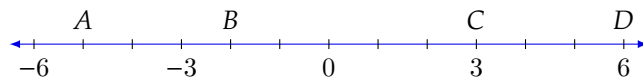
Հարց. *Կարո՞ղ եք ապացուցել թեորեմը:*

8.8 Երկրաչափական հավանականություն

Հավանականային խնդիրները լուծելու ամենահաճելի ձևերից է դրանց երկրաչափորեն մոտենալը:



Հարց. *AD հատվածից պատահականորեն վերցնում ենք որևէ կետ: Ի՞նչ եք կարծում, որքան է հավանական, որ այն կգտնվի B և C կետերի միջև:*

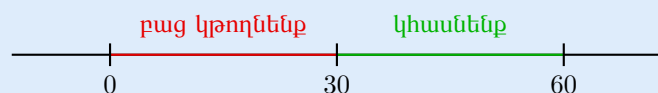


Ի՞նչ նկարի ունենք «երկրաչափորեն» ասելով. եթե բոլոր ելքերը հավասարահավանական են, ապա $\mathbb{P}[A]$ -ն հաշվելու համար

1. բոլոր ելքերի Ω բազմությունը պարկերում ենք հատվածի, շրջանի, քառակուսու կամ այլ երկրաչափական պարկերի միջոցով
2. նույնը անում ենք A -ի համար, այսինքն վերցնում ենք Ω -ի այն մասը, որի կետերը բավարարում են մեր A պատահույթին
3. նշված մասի (A -ի) երկարությունը/մակերեսը բաժանում ենք ընդհանուրի վրա

բոլոր պահերը նույն հավանականությամբ

Օրինակ 8.12 Ավտոբուսը գալիս է 12:00–13:00 ընկած պատահական պահի: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ ավտոբուսը բաց չենք թողնի, եթե 12:30-ին լինենք կանգառում:



Նախ նկարենք ավտոբուսի գալու ժամանակահատվածը՝ 12:00–13:00, որը կլինի 60 երկարությամբ հատված: Ապա նրա վրա նշենք այն հատվածը, որում գալու դեպքում ավտոբուսը բաց չենք թողնի: Կունենանք $[0, 30]$ հատվածը, որի երկարությունը բաժանելով

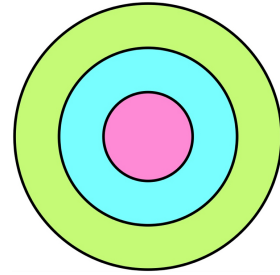
ընդհանուրի վրա՝

$$\mathbb{P}[\text{կհասնենք}] = \frac{30}{60} = 0.5$$

Դե իսկ եթե պարկերները ոչ թե հալվածներ են, այլ երկչափ պարկերներ, երկարության փոխարեն կբաժանենք դրանց մակերեսները:



Նաթ. Շրջանների շառավիղներն են 1, 2 և 3: Որքա՞ն է հավանական, որ պարահականորեն ընտրված կետը կգտնվի վարդագույն շրջանի մեջ:

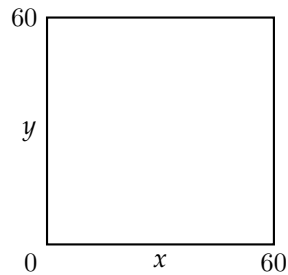


r շառավղով շրջանի մակերեսն է πr^2

Երկրաչափորեն լուծենք մի փոքր ավելի հեփաքրքիր խնդիր, որն առաջին հայացքից այնքան էլ երկրաչափական փեսք չունի:

Ենթադրենք հայրնի է, որ ավտոբուսը կանգառ է ժամանում 12:00–13:00 ժամանակահատվածում ինչ–որ պարահական պահի, 5 րոպե սպասում և շարժվում: Մենք նույնպես կանգառ ենք գալիս 12:00–13:00 ընկած որևէ պարահական պահի, սպասում մինչև 20 րոպե, և եթե 20 րոպեից ավտոբուսը չի գալիս, ուրբով հեռանում: Փորձենք պարզել, թե որքա՞ն է հավանականությունը, որ ավտոբուս կնստենք:

Նախ որո՞նք են հնարավոր ելքերը: Քանի որ ունենք երկու անհայտ մեծություններ, որոնք պարահական արժեքներ են ընդունում 12:00–ից 13:00–ի միջև, կամ որ նույնն է՝ $[0, 60]$ միջակայքում, ապա բոլոր ելքերը կարող ենք պարկերել 60×60 քառակուսու միջոցով՝



սա մեր Ω -ն է

Նարմարության համար x -ով նշանակենք մեր գալու պահը, իսկ y -ով՝ ավտոբուսինը. $(6, 34)$ կետը, օրինակ, ցույց կտա այն ելքը, երբ մենք կանգառ ենք հասել 12:06 րոպեին, իսկ ավտոբուսը 12:34–ին: Իհարկե այդ իրավիճակում մենք դեռևս 12:26 գնացած կլինենք և ավտոբուս չենք նստի:

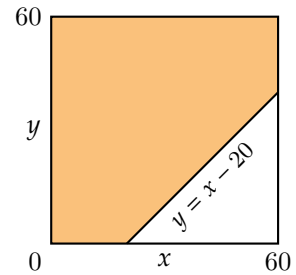
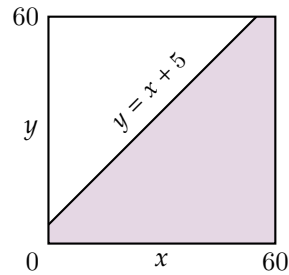
Ո՞ր պարկերը ցույց կտա ավտոբուս նստելու պարահույթը: Որպեսզի ավտոբուս նստենք, հարկավոր է, որ նախ մենք չուշանանք, այսինքն՝ զանք ավտոբուսի գնալուց ոչ ավել, քան 5 րոպե հետո.

$$y - x = \left(\text{մեր գալու պահը} \right) - \left(\text{ավտոբուսի գալու պահը} \right) \leq 5$$

կամ որ նույնն է՝ $y \leq x + 5$: Ուրեմն ավտոբուս նստելու համար y -ը պետք է գտնվի $y = x + 5$ ուղղից ներքև:

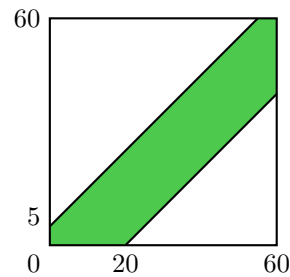
Մյուս կողմից՝ եթե զանք ավտոբուսից 20+ րոպե շուր, ապա 20 րոպեից կշարունակենք քայլել և նորից չենք նստի ավտոբուս: Ուրեմն ավտոբուս նստելու համար հարկավոր է, որ

$$x - y = \left(\text{ավտոբուսի գալու պահը} \right) - \left(\text{մեր գալու պահը} \right) \leq 20$$



կամ որ նույնն է՝ $y \geq x - 20$. y -ը գտնվի $y = x - 20$ ուղղից վերև:

Երկրաչափորեն այս փորձերից յուրաքանչյուրը մեր քառակուսու մեջ ընկած ինչ-որ հնգանկյուններ են, և այն կետերը, որոնք միաժամանակ երկուսում էլ գտնվում են, հենց այն ելքերն են, երբ ոչ մենք ենք ուշանում, ոչ ավերորուսը: Ներկաբար մեզ անհրաժեշտ ելքերի բազմությունը այս հնգանկյունների հատումն է՝



սպիտակ եռանկյունների էջերը՝ 55 և 40

որի մակերեսը բաժանելով ամբողջ քառակուսու մակերեսին՝ կստանանք ավերորուս նստելու հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[\text{ավերորուս նստել}] = \frac{\text{կանաչ մաս}}{\text{ընդհանուր}} = \frac{60^2 - \frac{55^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2} = \frac{103}{288} \approx 0.36$$

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Grimmett-Welsh], 3-5 էջերը (պարահայտություն)
- կարդալ [Blitzstein-Hwang], 8-13 (օրինակներ), 20-23 (հավանականություն) էջերը
- ըստ ցանկության՝ [Grimmett-Welsh], 6-10 էջերը
- վերադառնալ [Blitzstein-Hwang], 42-43, 49-52, 56-57 կամ [Grimmett-Welsh], 11-15 էջերին
- տեսնել հավանականության հաշվման փաթեթը **օրինակներ**
- խաղալ պայմանական հավանականության հետ
- դիտել 3b1b-ի տեսադասը Բայեսի բանաձևի մասին
- ըստ ցանկության՝ նաև մեկ այլ տեսանյութ

8.9 Խնդիրներ

Խնդիր 8.1 Ներում ենք երկու զառ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կընկնի

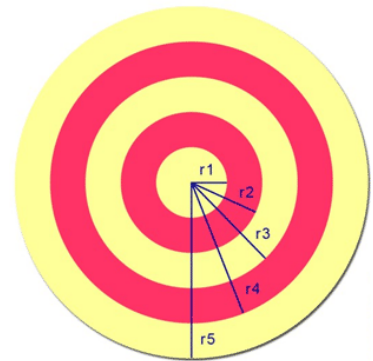
- ա. երկուսն էլ 3
- բ. գոնե մեկ հապ 1
- գ. ուղիղ մեկ հապ 1
- դ. մեկ հապ 1, մեկ հապ 4
- ե. առաջինը՝ 1, երկրորդը՝ 4

Խնդիր 8.2 Գրչապուփի մեջ կա 2 սև, 5 կապույտ և 6 դեղին մաքիպ: Պատահականորեն վերցնում ենք դրանցից երկուսը: Որքա՞ն է հավանական, որ երկու մաքիպն էլ

- ա. կարմիր կլինեն
- բ. նույն գույնի կլինեն
- գ. տարբեր գույների կլինեն
- դ. դեղին չեն լինի
- ե. կանաչ չեն լինի

Խնդիր 8.3 Նկարում պարկերված թիրախը կազմված է համապատասխանաբար 1, 2, 3, 4 և 5 սմ երկարությամբ շրջաններից: Պատահականորեն հարվածում ենք թիրախին: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կդիպչենք

- ա. ամենափոքր շրջանին
- բ. կարմիր շրջանի
- գ. դեղին շրջանի



Խնդիր 8.4 Մեքադադրամը նետում ենք 5 անգամ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կենսր անգամ կընկնի գիր:

Խնդիր 8.5 Գրապահարանում կա 15 գիրք, որոնցից 5-ը հայերեն են, 10-ը՝ ֆրանսերեն: Ռուբենը ֆրանսերեն չգիտի: Նա պատահականորեն վերցնում է 3 գիրք: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ նա դրանցից գոնե մեկը կարող է կարդալ:

Խնդիր 8.6 Երեք անգամ նետում ենք զառը: A , B , C -ով նշանակենք հետևյալ պատահույթները՝

- A = գոնե մեկ անգամ ընկել է զույգ թիվ
- B = գոնե մեկ անգամ ընկել է 3-ի պարիկ թիվ
- C = գոնե մեկ անգամ ընկել է 5

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ այս երեքից գոնե մեկը տեղի կունենա:

Խնդիր 8.7 Առաջին փուլում կա համապատասխանաբար $\{5, 11, 8\}$ սև, դեղին, կարմիր մաքիպ, իսկ երկրորդում՝ $\{10, 8, 6\}$: Յուրաքանչյուր փուլից պատահականորեն վերցնում ենք մեկական մաքիպ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ երկուսն էլ կլինեն նույն գույնի:

Խնդիր 8.8 Նետում ենք երկու զառ: Որքա՞ն է հավանական, որ դրանցից մեկը կընկնի 1, եթե գիտենք, որ դրանց գումարը զույգ է:

հայերեն՝ քյափ

Խնդիր 8.9 52 խաղաթղթերից պարահական վերցնում ենք 3-ը: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ առաջին երկուսը կլինեն թագուհի (դամա), իսկ երրորդը՝ ♦ աղյուս:

Խնդիր 8.10 Ցանկանում ենք գրել սպամերը հայտնաբերող ծրագիր: Նայարնի է, որ

- սպամ նամակների 80%-ը պարունակում է «շահեք» բառը
- ոչ սպամ նամակների 30%-ն է պարունակում «շահեք» բառը
- միջինում նամակների 40%-ը սպամ է

Ճիշտ այդ պահին ստանում ենք նամակ, որը պարունակում է «շահեք» բառը: Որքա՞ն է հավանական, որ այն սպամ է:

Խնդիր 8.11 Երեք նորածինների փրկում են ստուգելու, այնուհետև պարահականորեն վերադարձնում իրենց մայրերին: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ փոքրիկներից գոնե մեկին կվերադարձնեն իր մայրիկին:

Խնդիր 8.12 Առաջին գործարանը երկրորդից 2 անգամ ավելի շարժենքեր է արտադրում: Նայարնի է, որ

- առաջինում արտադրված զենքերի 40%-ը խտրան է
- երկրորդում արտադրվածների 16%-ն է խտրան

Պարահականորեն ստուգում ենք զենքերից մեկն ու պարզում, որ այն խտրանված չէ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ այն արտադրել են առաջին գործարանում:

Խնդիր 8.13 Արձակուրդի գնալիս հարևանին խնդրում եք ամեն օր ջրել Ձեր ծաղիկները: Եթե ծաղիկներն ամեն օր ջրեն, ապա 0.85 հավանականությամբ դրանք կշարունակեն ծաղկել, մինչդեռ եթե չջրեն, ապա գոյափնելու հավանականությունն ընդամենը 0.2 է: Գրեթե 90%-ով համոզված եք, որ Ձեր հարևանը կջրի ծաղիկները, սակայն արձակուրդից վերադառնալով՝ տեսնում եք, որ ծաղիկները թառամել են:

Որքա՞ն է հավանական, որ հարևանը մոռացել է ջրել ծաղիկները: Կշարունակե՞ք վստահել նրան:

Խնդիր 8.14 Նունեն դեպքերի 30% փոկոսում մեքենայով է գործի գալիս, 30%-ում՝ ուրքով, իսկ մնացած 40%-ում գալիս է ավտոբուսով: Ընդ որում,

- ուրքով գալիս ուշանում է դեպքերի 10%-ում
- մեքենայով գալիս՝ 3%-ում
- ավտոբուսով գալիս՝ 7%-ում

Երեկ Նունեն ուշացել է: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ նա ավտոբուսով էր գալիս: Որքա՞ն է հավանական, որ այսօր նա ուրքով էր, եթե այսօր ճիշտ ժամանակին է եկել:

Խնդիր 8.15 Անգեղիկն ունի 10 մեքադադրամ, որոնցից 9-ը սովորական են, իսկ 1-ի երկու կողմն էլ գիր է: Նա պարահականորեն վերցնում է մեքադադրամներից մեկը.

- ա. որքա՞ն է հավանականությունը, որ դա կեղծ մեքադադրամն է
- բ. եթե նա ների մեքադադրամն, ու այն գիր ընկնի, որքա՞ն է հավանականությունը, որ դա կեղծն է
- գ. եթե նա ների մեքադադրամն, ու այն դուշ ընկնի, որքա՞ն է հավանականությունը, որ դա 9 սովորականներից մեկն է

Խնդիր 8.16 Գառնի-Գեղարդից վերադառնալով Ձեր փեսախցիկը փանում եք արհեստանոց՝ լուսանկարները մշակելու: Ցավոք, արհեստանոցում ժապավենը փչացնում են, և ընդհանուր 24 կադրերից 4 հաջորդական կադրեր վնասվում են: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ վնասված կադրերի թվում են

- ա. ութերորդ, իններորդ կամ փասներորդ լուսանկարները
- բ. ութերորդ, իններորդ և փասներորդ լուսանկարները

Խնդիր 8.17 Անուշն ու Նաիրին ժամը 12:00-ից 13:00 որևէ պարահական պահի գալիս են «Մոսկվա» կինոթատրոնի մոտ և սպասում մյուսին՝ միասին ընդմիջման գնալու համար: Եթե երկրորդը 15 րոպեից ավել է ուշանում, առաջինը փեղ հասնողը միայնակ է գնում ընդմիջման:

լուծում

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ նրանք միասին կընդմիջեն, եթե երկուսի համար էլ 12:00-13:00 բոլոր պահերը հավասարահավանական են:

9.1 Ֆորմալ սահմանումը

Նախորդ թեմայի վերջին խնդիրը լուծելիս ունեինք երկու անհայտ մեծություններ՝ ավտոբուսի գալու ժամանակն ու մեր գալու ժամանակը, որոնց արժեքը հայտնի չէր (ընդունում էին պատահական արժեքներ), սակայն գիտեինք, թե որոնք էին դրանց հավանական արժեքները, այնպես որ դրանք նշանակեցինք փառերով ու լուծեցինք խնդիրը: Նմանապիպ մեծությունները, որոնց արժեքը չգիտենք, բայց կարող ենք *հաշվել*, թե ինչ հավանականությամբ են ընդունում այս կամ այն արժեքը, կոչվում են *պատահական մեծություններ*:



Նաթ. Փողոցում մոտենում եք պատահական անցորդի ու հարցնում նրա հասակը: Մոտավորապես ո՞ր միջակայքի արժեքներն են ավելի շատ հավանական, որո՞նք՝ ավելի քիչ:

Եթե փորձենք ավելի ճշգրիտ ձևակերպում փալ, կարող ենք փողոցում քայլող բոլոր հնարավոր մարդկանց բազմությունը համարել մեր Ω -ն, և ասել, որ պատահական ընտրված ցանկացած մարդու համապատասխանեցրել ենք ինչ-որ մի թիվ՝ նրա հասակը: Կամ որ նույնն է՝ սրբեղծել ենք X ֆունկցիա, որը վերցնում է ω մարդուն ու վերադարձնում նրա հասակը՝ $X(\omega)$:

Օրինակ 9.1 Խաղում ենք հեքսյալ խաղը. ներում ենք զառը, պարզ թիվ ընկնելու դեպքում շահում ենք 100 դրամ, բաղադրյալ թվի դեպքում՝ կորցնում 100, հակառակ դեպքում՝ լինում է ոչ-ոքի: Այս դեպքում մեր վերջնական շահումը/կորուստը կլինի պատահական մեծություն:

Եթե նշանակենք այն X -ով, ապա X -ը կընդունի երեք արժեք՝

$$X = \begin{cases} 100 & \text{եթե } \omega \in \{2, 3, 5\} \\ -100 & \text{եթե } \omega \in \{4, 6\} \\ 0 & \text{եթե } \omega \in \{1\} \end{cases}$$

Կարո՞ղ եք հաշվել հավանականությունը, որ $X = 100$:

Առհասարակ՝ ցանկացած բան, որի արժեքը կախված է ինչ-որ պատահական փորձի արդյունքից, հանդիսանում է պատահական մեծություն:

Օրինակ 9.2 Դիտարկենք հեքսյալ պատահական փորձերը.

1. Ներում ենք երկու զառ: Դրանց ելքերի գումարը պատահական մեծություն է:
2. Երկու թիմ խաղում են ֆուտբոլ: Նրանց խփած գոլերի թիվը, ինչպես նաև հաշվի փարբերությունը պատահական մեծություններ են:

9.1 Ֆորմալ սահմանումը . . .	121
9.2 Դիսկրետ պատահական մեծություններ	123
9.3 Բաշխման ֆունկցիա . . .	125
9.4 Անընդհատ պատահական մեծություններ	129
9.5 Նավասարաչափ բաշխում	131
9.6 Անկախություն	133
9.7 Խնդիրներ	134

անգլերեն՝ *random variables*

3. Զանգահարում ենք պատահական հեռախոսահամարով և հարցնում, թե քանի երեխա կա ընտանիքում. սա նույնպես պատահական մեծություն է:
4. Ընդհանուր քանի հաղորդագրություն կստանաք վաղը՝ պատահական մեծություն է:
5. Երկու ավտոբուս պատահական պահերի անցնում են կանգառով: Դրանցից յուրաքանչյուրի գալու պահը, ինչպես նաև այդ երկու պահերի փարբերությունը պատահական մեծություններ են:
6. Որքան կլինեն «Apple»-ի արժեթղթերը հաջորդ շաբաթ՝ պատահական մեծություն է:
7. xy -հարթության վրա պատահական նշված կետի երկու կոորդինատները, նաև այդ կետի հեռավորությունը, ասենք, $(5, 3)$ կետից՝ պատահական մեծություններ են:



Նաթ. Որո՞նք են նշված պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրի հնարավոր արժեքները:

Օրինակ 9.3 Ներում ենք երկու զամ: Այն, թե

- ո՞վ է նետել զառերը
- ի՞նչ գույն ունի երկինքը
- ինչո՞ւ է աղմկում գետը
- ի՞նչ թիվ է ընկել երրորդ զառը

պատահական մեծություններ *չեն*, քանի որ դրանք *կախված չեն* կատարված փորձի արդյունքից. եթե նույնիսկ իմանայինք, թե ինչ են ընկել զառերը, այս հարցերին չէինք կարող պատասխանել:

այսինքն՝ չափել, թե որքան է հավանական, որ X -ի արժեքը կլինի այս կամ այն բազմությունից (թե չէ՝ ամբողջ փետությունն անիմաստ կդառնար)

Այսպիսով, ինքուրիփիվ դժվար չէ հասկանալ, թե այս կամ այն խնդրում ինչն է պատահական մեծություն: Եթե այնուամենայնիվ փորձենք ավելի ճշգրիտ սահմանել, կասենք, որ ցանկացած այնպիսի X , որի արժեքների հավանականությունը կարող ենք չափել, պատահական մեծություն է:



Զգուշացե՛ք. Առջևում սպասվում է փեռական բնույթի բննարկում:

Իսկ հավանականությունը չափելու համար անհրաժեշտ է մեկ բան: Որպեսզի, օրինակ, կարողանանք հաշվել, թե ինչ հավանականությամբ է X -ը ընդունում 1.57 արժեքը՝

$$\mathbb{P}[X = 1.57]$$

անհրաժեշտ է, որ $\mathbb{P}[\quad]$ -ի մեջ գրվածը լինի պատահույթ, այսինքն՝

$$\{X = 1.57\} = \{\text{այն } \omega\text{-ները, որոնց համար } X = 1.57\} \in \mathcal{F}$$

Նույն ձև բնականաբար պետք է կարողանանք չափել $\mathbb{P}[X < 1.57]$, $\mathbb{P}[X > 1.57]$, $\mathbb{P}[X \leq 1.57]$ և մնացած այլ հավանականությունները:



Նաթ. Ունենալով $\mathbb{P}[X \leq 1.57]$ -ը՝ կարո՞ղ եք հաշվել $\mathbb{P}[X > 1.57]$ -ը:

Ուրեմն ֆորմալ կպահանջենք, որ ասենք՝ $\{X \leq 1.57\}$ բազմությունը լինի պատահույթ (= հնարավոր լինի չափել դրա հավանականությունը), կամ ընդհանուր դեպքում՝ ցանկացած c թվի համար

$$\{X \leq c\} = \{\omega\text{-ները, որոնց համար } X \leq c\} \in \mathcal{F}$$

լինի պատահույթ: Ահա այս պայմանին բավարարող ցանկացած X կանվանենք պատահական մեծություն:

կարող ենք իհարկե $\leq$ -ի փոխարեն գրել $<$, $>$ կամ $\geq$

Նշենք, որ հետագա կիրառություններում բավարար է ընդամենը համարել, որ ցանկացած անհայտ, բայց խելքին մոտիկ բան պատահական մեծություն է:

Նկատենք նաև, որ եթե X -ը ինչ-որ մի պատահական մեծություն է, ապա նրա հետ գործողություններ անելիս՝

- $2X$ -ը
- $X + 4$ -ը
- X^2 -ն
- e^X -ը

և այլն նույնպես կլինեն պատահական մեծություններ:

Ավելի ընդհանուր,

Թեորեմ 9.1 Եթե X -ը պատահական մեծություն է, ապա $g(X)$ -ը նույնպես պատահական մեծություն է (ցանկացած g անընդհատ ֆունկցիայի համար):

9.2 Դիսկրետ պատահական մեծություններ

Ինչպես նկատում ենք, որոշ պատահական մեծությունների հնարավոր արժեքները կարելի է ներկայացնել ցուցակի տեսքով, օրինակ՝ $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ կամ $\{0, 1, 2, \dots\}$, իսկ որոշներինը՝ միջակայքերի՝ $(0, +\infty)$:

Եթե պատահական մեծության հնարավոր արժեքների բազմությունը

- վերջավոր է՝ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, կամ անվերջ, բայց հաշվելի՝ $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, ապա այն կանվանենք *դիսկրետ* կամ *ընդհատ*
- իսկ եթե այն ինչ-որ միջակայք է՝ (a, b) կամ $[a, b]$ (կամ դրանց միավորում), ապա այն կանվանենք *անընդհատ*

այսինքն անվերջ, բայց միջակայքեր չպարունակող, օրինակ՝ $\mathbb{N}$ -ը

Մասնավորապես, ցանկացած բանի քանակ ցույց տվող պատահական մեծությունները դիսկրետ են, իսկ ժամանակ կամ երկարություն ցույց տվողները՝ անընդհատ: Օրինակ 9.2-ի 1-4 դեպքերում պատահական մեծությունները դիսկրետ են, 5-7-ում՝ անընդհատ:

Նաթ. X -ով նշանակենք զառի թվի մնացորդը 3-ի բաժանելիս.



- *ի՞նչ հնարավոր արժեքներ կարող է այն ընդունել*
- *որքա՞ն է դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը*
- *որքա՞ն է հավանական, որ $X = 5$*

Իհարկե, եթե որևէ անհայտ բան նշանակել ենք X -ով, նախ և առաջ կուզեինք պարզել, թե որքան է հավանական, որ այն կընդունի այսինչ

արժեքը: Վերցնենք ասենք՝ օրինակ 9.1-ի խաղում մեր շահույթը ցույց տվող X պատահական մեծությունը.

$$X = \begin{cases} 100 & \text{եթե } \omega \in \{2, 3, 5\} \\ -100 & \text{եթե } \omega \in \{4, 6\} \\ 0 & \text{եթե } \omega \in \{1\} \end{cases}$$

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ կշահենք 100 դրամ, այսինքն՝

$$\mathbb{P}[X = 100] = ?$$

Քանի որ X -ը 100 արժեքը ընդունում է $\{2, 3, 5\}$ ելքերի դեպքում, $X = 1$ -ի հավանականությունը կլինի հենց այդ պատահույթի հավանականությունը՝

$$\mathbb{P}[X = 100] = \mathbb{P}[\{2, 3, 5\}] = \frac{3}{6} = 0.5$$

իսկ օրինակ ոչ-որի հավանականությունը՝

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[1] = \frac{1}{6}$$

Ներկայալ արտահայտությունը՝

$$\mathbb{P}[X = \text{ինչ-որ թիվ}]$$

որը վերևում հաշվեցինք, ըստ էության ֆունկցիա է, որը վերցնում է c թիվն ու վերադարձնում X -ի՝ այդ c թվին հավասար լինելու հավանականությունը՝

$$p_X(c) = \mathbb{P}[X = c]$$

այսինքն հաշվում, թե որքան է հավանական, որ $X = c$: Այդ p_X ֆունկցիան կանվանենք X -ի **հավանականային ֆունկցիա** կամ **PMF**:

probability mass function

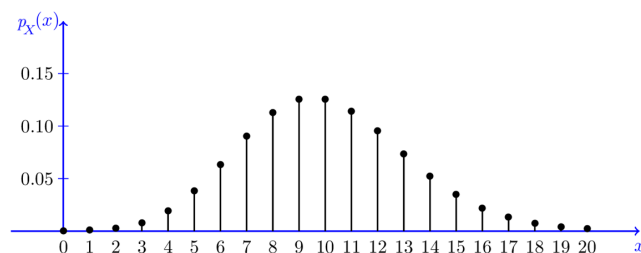


Նաթղ. Ենթադրենք X -ը հենց զառը նետելիս ստացվող թիվն է: Կարո՞ղ եք գրել կամ պատկերել դրա հավանականային ֆունկցիան:

PMF-ի շնորհիվ, օրինակ՝ եթե ունենք դրա գրաֆիկը, կարող ենք պարկերացում կազմել, թե ի՞նչ արժեքներ է ընդունում X -ը, արժեքներից ո՞րը ի՞նչ հավանականությամբ, և այլն:



Նաթղ. Քանի՞ ֆիլմ եք դիտելու հաջորդ ամիս: Պատասխանը նշանակենք X -ով և գծենք նրա PMF-ի գրաֆիկը: Որքա՞ն է հավանական, որ կդիտեք 5-6 ֆիլմ: Քանի՞ ֆիլմն է ամենահավանականը:



Օրինակ 9.4 Ուսանողը գիտի հարցաշարի 15 թեմաներից 4-ը, ընդ որում քննության ժամանակ տրվելու է 2 հարց: X -ով նշանակենք, թե այդ երկու հարցից քանիսին կպատասխանի ուսանողը, և հաշվենք X -ի PMF-ը:

Նավանականությունը, որ ուսանողը ոչ մի հարցի չի պատասխանի, նույնն է, ինչ եթե ն' առաջին, և' երկրորդ հարցերը լինեն նրա չիմացած հարցերից.

$$\mathbb{P}[X = 0] = \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{21} \approx 0.52$$

Իսկ որպեսզի երկուսին էլ կպատասխանի, անհրաժեշտ է, որ ն' առաջինը, և' երկրորդը լինեն իր իմացածներից.

$$\mathbb{P}[X = 2] = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{6}{105} \approx 0.06$$

Մնաց մի դեպք՝ երկու հարցից ուղիղ մեկին պատասխանելու դեպքը, որի հավանականությունը կլինի

$$\mathbb{P}[X = 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] - \mathbb{P}[X = 2] = \frac{44}{105} \approx 0.42$$

Ներկայացնենք X -ի PMF-ն է՝

$$p_X(k) \approx \begin{cases} 0.52 & \text{եթե } k = 0 \\ 0.42 & \text{եթե } k = 1 \\ 0.06 & \text{եթե } k = 2 \\ 0 & \text{եթե } k\text{-ն այլ թիվ է} \end{cases}$$

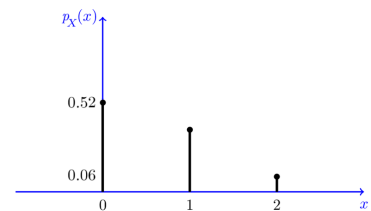
որը ցանկության դեպքում կարող ենք ներկայացնել աղյուսակով՝

k	$\mathbb{P}[X = k]$
0	0.52
1	0.42
2	0.06

$\Rightarrow$ պետք էր ժամանակին սովորել

կարող էինք հաշվել նաև այսպես՝

$$\mathbb{P}[X = 1] = \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} + \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14}$$



9.3 Բաշխման ֆունկցիա

Նավանականային ֆունկցիան, իհարկե, կարևոր է իմանալ, բայց այս իրավիճակում ուսանողին հետաքրքրում է ոչ այնքան իր պատասխանած հարցերի թիվը, որքան քննության արդյունքը՝ կկրվի՞, թե՛ ոչ:

Եթե օրինակ՝ անցողիկ շեմը լինել ճիշտ պատասխանել 1 հարցի, կտրվելու հավանականությունը կլինի

$$\mathbb{P}[X < 1] = \mathbb{P}[X = 0] \approx 0.52$$

Իսկ եթե լինել 2 հարց՝

$$\mathbb{P}[X < 2] = \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1] \approx 0.94$$

Գոյարևելու շանսերը կլինեն ինչպես $1 - 0.52 = 0.48$

և $1 - 0.94 = 0.06$:

Մի ուրիշ իրավիճակում հնարավոր միավորների թիվը կարող էր լինել 1-ից մինչև 20՝ յուրաքանչյուր արժեքը իր հավանականությունով: Այս դեպքում ևս, եթե ուսանողը ցանկանար հաշվել իր կտրվելու (ասենք՝ 10 միավոր կամ ցածր հավաքելու) հավանականությունը, կգրեր

$$\mathbb{P}[X \leq 10] = \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1] + \dots + \mathbb{P}[X = 10]$$

իսկ քննությունը սրանալուը կլիներ $1 - \mathbb{P}[X \leq 10]$:

Գործնականում հաճախ է պետք գալիս առանձին-առանձին $1, 2, \dots, k$ արժեքներն ընդունելու հավանականություններից բացի ունենալ նաև k -ից փոքր, մեծ, փոքր կամ հավասար լինելու հավանականությունը՝

$$\mathbb{P}[X \leq k]$$

Բայց այսպեղ ևս k -ի փարբեր արժեքներ տեղադրելով՝ սրանում ենք փարբեր թվեր, հետևաբար գործ ունենք k -ից կախված ֆունկցիայի հետ: Ուրեմն PMF-ի նմանությամբ սահմանենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F_X(k) = \mathbb{P}[X \leq k]$$

cumulative distribution function

և անվանենք այն X -ի **բաշխման ֆունկցիա** կամ **CDF**:



Նաթղ. Ուսանողի օրինակում ինչի՞ է հավասար X -ի CDF-ը:

Օրինակ 9.5 X -ով նշանակենք զառը նետելիս սրացված թիվը և գրենք դրա բաշխման ֆունկցիան: Սկսենք $k = 1$ -ից՝

$$F_X(1) = \mathbb{P}[X \leq 1] = \frac{1}{6}$$

քանի որ X -ը 1-ից փոքր արժեք չի կարող ընդունել:

Իսկ ասենք $k = 2$ արժեքի դեպքում՝

$$F_X(2) = \mathbb{P}[X \leq 2] = \mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = 2] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Նույն կերպ $k = 3$ -ի համար $F_X(3) = \frac{3}{6}$, ապա

$$F_X(4) = \frac{4}{6} \quad F_X(5) = \frac{5}{6} \quad F_X(6) = \frac{6}{6} = 1$$

Իսկ ի՞նչ, եթե F_X -ի մեջ տեղադրենք 6-ից մեծ թիվ, ասենք՝ $k = 8$: Կունենանք՝

$$F_X(8) = \mathbb{P}[X \leq 8] = 1$$

քանի որ X -ի արժեքը միշտ փոքր է 8-ից: Նույն ձևով $F_X(k) = 1$ բոլոր այնպիսի k թվերի համար, որոնք մեծ են 6-ից:

Մյուս կողմից՝ եթե տեղադրենք 1-ից փոքր արժեք, ասենք՝

$$F_X(0.12) = \mathbb{P}[X \leq 0.12] = 0$$

կունենանք 0, քանի որ X -ը երբեք չէ 1-ից: Ներկայացնենք $F_X(k) = 0$ բոլոր $k < 1$ թվերի համար:

Վերջապես եթե փողերենք ոչ ամբողջ թիվ, օրինակ՝

$$F_X(5.5) = \mathbb{P}[X \leq 5.5] = \mathbb{P}[\text{որքա՞ն է հավանական, որ } X \leq 5.5]$$

ապա դա կլինի նույնը, ինչ $\mathbb{P}[X \leq 5]$: Ներկայացնենք X -ի CDF-ը կլինի հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{եթե } x < 1 \\ 1/6 & \text{եթե } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & \text{եթե } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & \text{եթե } 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & \text{եթե } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & \text{եթե } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{եթե } x \geq 6 \end{cases}$$



Նախադրյալ. Ի՞նչ տեսք ունի F_X -ի գրաֆիկը:

Ինչպես երևում է, F_X ֆունկցիան անընդհատ չէ: Այն խզվում է 1, 2, 3, 4, 5, 6 կետերում, այդ կետերի միջև ընդունում է ֆիքսված հաստատուն արժեքներ, ապա ցատկոտիվ բարձրանում է ու ընդունում հաջորդ արժեքը:

Փորձեք գծել F_X -ի գրաֆիկը



Նախադրյալ. Կարո՞ղ եք F_X -ի գրաֆիկին նայելով որոշել նրա ընդունած հնարավոր արժեքները: Իսկ դրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը:

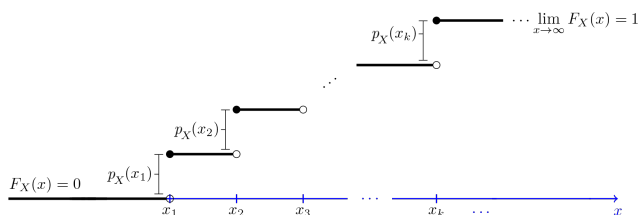
Նկատենք, որ

1. F_X -ը չնվազող ֆունկցիա է
2. F_X -ի արժեքները ընկած են $[0, 1]$ միջակայքում
3. ընդ որում $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ և $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

ո՞րն է ավելի մեծ՝

$$\mathbb{P}[X \leq 10] \quad \text{թե՛} \quad \mathbb{P}[X \leq 10000]$$

Իրականում այս 1-3 հատկությունները ճիշտ են ոչ միայն զառի, այլ առհասարակ ցանկացած պարահական մեծության համար (և դիսկրետ, և անընդհատ): Ավելին, բոլոր դիսկրետ X -երի CDF-ի գրաֆիկն ունի այսպիսի ասփիճանաձև տեսք՝



որի խզումներին նայելիս կարելի է գլխի ընկնել, թե X -ը որ արժեքը ինչ հավանականությամբ է ընդունում:

$$\mathbb{P}[X = k]\text{-ն կգրենք } F_X(k) - F_X(k-1)$$

PMF-ը և CDF-ը (որոնցից մեկը ունենալով՝ կարելի է ստանալ մյուսը) հարմար գործիքներ են փոխադրական մեծության արժեքների վերաբերյալ պատկերացում կազմելու համար: Պայմանավորվենք՝ այն, թե ի՞նչ արժեքներ է ընդունում պատահական մեծությունը, կամ որքա՞ն հավանականությամբ, կամ որքա՞ն է հավանական, որ այն մեծ/փոքր է այսինչ թվից, այդ ամենը անվանել պատահական մեծության *բաշխում*:

Կասենք, որ գիտենք X -ի բաշխումը (կամ թե ինչպես են X -ի արժեքները բաշխված), եթե գիտենք նրա PMF-ը կամ CDF-ը: Իսկ եթե ունենանք երկու պատահական մեծություններ, որոնք ունենան նույն բաշխումը, այսինքն՝ ցանկացած արժեք ընդունեն երկուսն էլ նույն հավանականությամբ, ապա կասենք, որ դրանք *միատեսակ* են բաշխված:

անգլերեն՝ *identically distributed*

Սահմանում 9.1 X և Y պատահական մեծությունները կոչվում են *միատեսակ բաշխված*, եթե նրանց CDF/PMF-ները համընկնում են:



Զգուշացե՛ք. Միատեսակ բաշխված $\neq$ միմյանց հավասար:

Օրինակ 9.6 Քննության է մտնում հաջորդ ուսանողը, որը ևս 15 հարցից սովորել է 4-ը: Բնականաբար, հավանականությունը, որ նա կկորվի կամ կանցնի քննությունը, նույնն է, ինչ առաջին ուսանողին: Ներկաբար եթե X -ով նշանակենք, թե քանի հարցի ճիշտ կպատասխանի առաջին ուսանողը, իսկ Y -ով՝ երկրորդը, ապա $p_X(k) = p_Y(k)$, և X -ն ու Y -ը կլինեն միատեսակ բաշխված:

եթե չփարբերվեին, կլինե՞ր նույն պատահական մեծությունը՝ փարբեր փառերով նշանակած

Ասվածից, իհարկե, չի հեքուում, որ երկու ուսանողն էլ պատասխանելու են նույն քանակով հարցերի. X -ի ու Y -ի արժեքները կարող են իրարից փարբերվել, չնայած որ ցանկացած արժեք ընդունելու հավանականությունը երկուսի դեպքում էլ նույնն է:

Օրինակ 9.7

- Նեղենք երկու գառ, X -ով նշանակենք առաջինի թիվը, Y -ով՝ երկրորդի: Կրկին, X -ն ու Y -ը միատեսակ են բաշխված: Դրանով հանդերձ կարող են ընկնել ինչպես նույն թիվը, այնպես էլ փարբեր թվեր:
- Նեղենք մեքադադրամը և նշանակենք

$$X = \begin{cases} 1 & \text{եթե ընկնի գիր} \\ 0 & \text{եթե ընկնի դուշ} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{եթե ընկնի գիր} \\ 1 & \text{եթե ընկնի դուշ} \end{cases}$$

Այս դեպքում մեքադադրամը ինչ էլ ընկնի, X -ն ու Y -ը չեն կարող հավասար լինել: Բայց դրանց բաշխումները համընկնում են, քանի որ

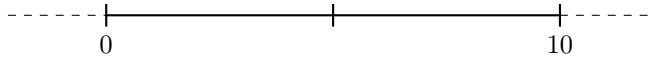
$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[Y = 1] = 0.5$$



Նաթց. Բ՛նչ կասե՞ք X -ի մասին, եթե F_X ֆունկցիան բացասական կերպերում 0 է, դրականներում՝ 1:

9.4 Անընդհատ պատահական մեծություններ

Պարկերացնենք այսպիսի իրավիճակ: Օդում թռչող ճանճը մոտենում է փերրում նկարված $[0, 10]$ հատվածին և պատահականորեն նստում որևէ կետում (ընդ որում կարևոր չէ՝ բոլոր կետերը նույն հավանականությունն ունեն, թե ասենք մեջքեղի կետերն ավելի հավանական են):



Նշանակենք ճանճի նստած կետը X -ով և գրենք դրա PMF-ը:



Նաթգ. Որքա՞ն է հավանականությունը, որ $X = 5$: Իսկ ասենք $\mathbb{P}[X = 5.89]$ -ը՝:

Նախ, X -ի հնարավոր արժեքներն են $[0, 10]$ միջակայքի բոլոր կետերը. X -ը դիսկրետ չէ: Ներկայումս արժեքների բանակն այնքան մեծ է, որ առանձին վերցրած՝ ցանկացած կետի հավանականությունը 0 է: Ուրեմն

$$p_X(x) = 0$$

բոլոր կետերում: Ներկայումս $\mathbb{P}[X = \text{ինչ-որ թիվ}]$ հարցները ոչ մի իմաստ չունի. p_X ֆունկցիան միշտ 0 է և ունակ չէ որևէ բան ասել X -ի արժեքների մասին:

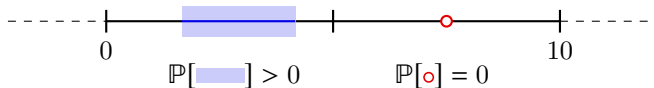
Ուրեմն հավանականային ֆունկցիան այս դեպքում չի աշխատում: Փոխարենը օգնության է գալիս բաշխման ֆունկցիան, որն այս դեպքում ևս շարունակում է աշխատել. եթե $\mathbb{P}[X = 5]$ -ը զրո է, ապա $\mathbb{P}[X \leq 5]$ -ը միևնույն է՝ դրական թիվ է, որը ցույց է տալիս 5 կետից ձախ նստած լինելու հավանականությունը՝

$$F_X(5) = \mathbb{P}[X \leq 5] = \mathbb{P}[X < 5]$$

Ներկայումս CDF-ից օգտվելով կարող ենք չափել X -ի արժեքի՝ ցանկացած (a, b) միջակայքում գտնվելու հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[X \in (a, b)] = \mathbb{P}[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$$

իսկ a և b կետերի հավանականությունը կլինի 0:



Եթե մեզ ամեն դեպքում հետաքրքիր է եթե ոչ $X = 5$ լինելու, ապա գոնե 5-ին մոտիկ արժեքներ ընդունելու հավանականությունը, կարող ենք վերցնել ասենք՝ 5 կետի կողքը մի փոքր միջակայք և հաշվել դրա հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[X \in (5 - h, 5 + h)] = F_X(5 + h) - F_X(5 - h)$$



Նաթգ. Կռահո՞ւմ եք, թե որ կողմ է խոսակցությունը գնում:

Եթե 5-ը զանք անցնենք, բայց հավանականությունը չփոխվի, կստացվի, որ 5-ը «կշիռ» չունի

Սա մեզ կրա 5 արժեքին շար մոտ լինելու հավանականությունը, իսկ որպեսզի հասկանանք՝ որքա՞ն է բուն 5-ի ներդրումը, այսինքն՝ 5 կետին մոտենալիս ինչքա՞ն է հավանականությունը մեծանում կամ փոքրանում, բաժանենք այս թիվը միջակայքի երկարության վրա՝

$$\frac{F_X(5+h) - F_X(5-h)}{2h}$$

և ձգտենք h -ը զրոյի:

Ստացված թիվը կլինի F_X -ի ածանցյալը, որը կանվանենք 5 կետում X -ի բաշխման **խտություն**:

Սահմանում 9.2 Եթե X -ը անընդհար պատահական մեծություն է, իսկ $f_X(x)$ -ն այնպիսի ֆունկցիա է, որ ցանկացած $c \in \mathbb{R}$ թվի համար

$$F_X(c) = \int_{-\infty}^c f_X(t) dt$$

ապա f_X -ը կանվանենք X -ի **խտության ֆունկցիա** կամ **PDF**:

probability density function

Այսինքն խտության ֆունկցիան բաշխման ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

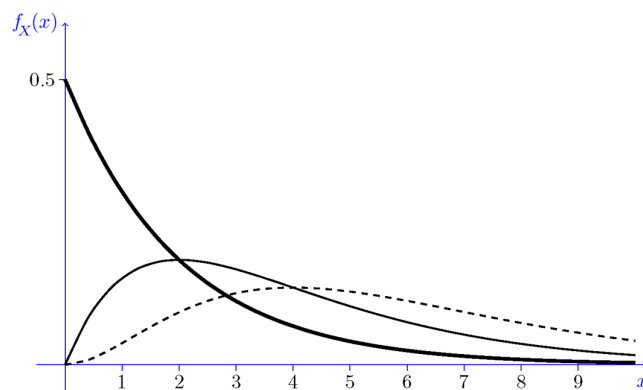
$$F'_X(x) = f_X(x)$$

F_X -ը չնվազող է $\Rightarrow f_X \geq 0$

Խոսքը, իհարկե, այն կետերի մասին է, որոնցում F_X -ն ունի ածանցյալ:

Իսկ սահմանման մեջ նշված բանաձևն ասում է, որ $\mathbb{P}[X \leq c]$ -ն հաշվելու համար պետք է ինտեգրել այս f_X -ը մինչև c թիվը, այսինքն $(-\infty, c)$ -ում արժեք ընդունելու հավանականությունը հավասար է $(-\infty, c)$ միջակայքում f_X -ի գրաֆիկի տակ եղած **մակերեսին**:

Խտության ֆունկցիան կարող է ընդունել տարբեր տեսքեր, ասենք՝ ճանճը կարող է նախապատվություն տալ 0 կետին ավելի մոտ արժեքներին կամ նախընտրել նստել մեջտեղում:



Երեք տարբեր հնարավոր PDF-ներ՝ կախված ճանճի ճաշակից



Նաթց. PDF-ներից յուրաքանչյուրի դեպքում ո՞ր միջակայքում է ամենահավանական, որ ճանճը կնստի:

Ինչպես դիտարկել պատահական մեծության դեպքում PMF-ին, այնպես էլ անընդհար պատահական մեծության դեպքում՝ նրա PDF-ին նայելով կարող ենք ստանալ բազմաթիվ տեղեկություններ նրա հնարավոր արժեքների ու դրանց հավանականությունների մասին:

Օրինակ՝ վերևի գրաֆիկներից յուրաքանչյուրում խտության ֆունկցիան 0-ից ձախ և 10-ից աջ գրո է, հետևաբար եթե չիմանայինք էլ՝ նայելով կիսականայինք, որ X -ի հնարավոր արժեքները $[0, 10]$ -ն են: Կարող ենք նաև ասել, որ եթե f_X -ի արժեքը մեծ է օրինակ՝ $x = 2$ կետում, ապա X -ը մեծ հավանականությամբ է արժեքներ ընդունում 2 կետի հարևան շրջակայքում:

Ըստ էության՝ PDF-ը PMF-ի անալոգն ու փոխարինողն է անընդհար պատահական մեծությունների համար: Ինչպես դիսկրետ դեպքում p_X -ը, այնպես էլ անընդհար դեպքում f_X -ը չի կարող լինել բացասական՝

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{ցանկացած } x \in \mathbb{R} \text{ կետում}$$

սակայն քանի որ վերջինս հավանականություն չի ցույց տալիս (այլ ընդամենը դրա խտությունը), ապա f_X -ը կարող է ընդունել 1-ից մեծ արժեքներ: Վերջինիս սահմանումից նաև հետևում է, որ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = F_X(+\infty) = \mathbb{P}[X \leq +\infty] = 1$$

քանի որ... ինչպես կարող է X -ը լինել $+\infty$ -ից մեծ:



Նաթգ. Ունենալով f_X -ը՝ ինչպես գրենք $\mathbb{P}[a < X < b]$ -ն:

Ամենահաճելի հարկությունը, որի շնորհիվ կարող ենք կիրառել խտության ֆունկցիան՝

$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f_X(t) dt$$

այսինքն հավանականությունը, որ X -ն ընկած է (a, b) միջակայքում հավասար է այդ միջակայքում նրա PDF-ի տակ ընկած մակերեսին:

9.5 Նավասարաչափ բաշխում

Փակենք մեր աչքերն ու մաքրը դնենք $[0, 10]$ հատվածում որևէ պատահական X կետի վրա: Կունենանք մի իրավիճակ, որը շատ նման է ճանճի դեպքին՝ այն տարբերությամբ, որ եթե ճանճը կարող է հակված լինել նստել ավելի ձախ կամ ավելի աջ գոնավոր կետերում, և հատվածի տարբեր մասերում նստելու հավանականությունը կարող է տարբեր լինել, ապա այս օրինակում կարող ենք համարել, որ աչքերը փակ ընտրելիս որևէ նախապատվություն չկա. ոչ մի թվի մոտ նշելու հավանականությունը մյուսից ավել չէ:

նույն երկարությամբ ցանկացած երկու միջակայք նույնչափ հավանական են՝

$$\mathbb{P}[X \in (1.3, 1.5)] = \mathbb{P}[X \in (4.7, 4.9)]$$



Նաթգ. Ըստ Ձեզ՝ ի՞նչ տեսք կունենա X -ի խտության գրաֆիկը:

$[0, 10]$ հատվածի փոխարեն վերցնենք ավելի ընդհանուր՝ $[a, b]$ հատվածը, և երկրաչափորեն փորձենք պարզել X -ի բաշխումը:

Սկսենք CDF-ից: Քանի որ X -ի հնարավոր արժեքներն են $[a, b]$, ապա a -ից փոքր արժեք ընդունելու հավանականությունը 0 է՝

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = 0 \quad \text{երբ } x < a$$

Պարզենք $F_X(x)$ -ի արժեքը, երբ $a \leq x \leq b$:



այսպիսով արդեն կարող ենք օգտվել երկ-
րաչափական հավանականությունից

Հավանականությունը, որ X -ը ընկած կլինի $[a, x]$ միջակայքում՝

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \frac{[a, x]\text{-ի երկարություն}}{[a, b]\text{-ի երկարություն}} = \frac{x - a}{b - a}$$

Դե իսկ երբ x -ն ընկած լինի b -ից աջ,

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[X \leq b] = 1$$

և հետևաբար

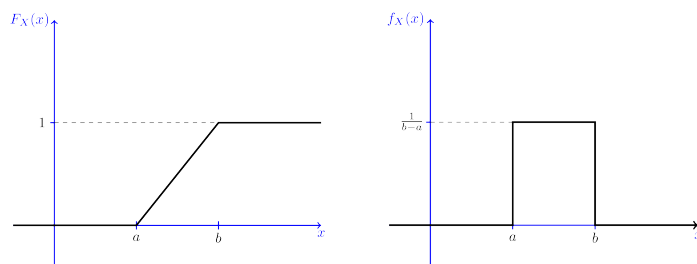
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{երբ } x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{երբ } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{երբ } x > b \end{cases}$$

a -ում ու b -ում F_X -ը ածանցյալ չունի,
բայց դրանց կանխեսենք

Ստացանք X -ի բաշխման ֆունկցիան, և երբ այն ածանցենք՝

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{երբ } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{մնացած կետերում} \end{cases}$$

կստանանք նաև X -ի խտության ֆունկցիան:



Նկատենք, որ X -ի PDF-ն ունի մեր ակնկալած տեսքը՝ $[a, b]$ -ից դուրս զրո է, իսկ ներսի բոլոր կետերում ընդունում է նույն արժեքը (ուրեմն ոչ մի կետի մոտ հավանականությունը մեծ կամ փոքր չէ), և նրա գրաֆիկի տակ եղած մակերեսը 1 է: Մյուս կողմից CDF-ը $[a, b]$ միջակայքում գծորեն, այսինքն՝ հաստատուն արագությամբ աճում է: Գրաֆիկների այս տեսքը մաքուր է, որ գործ ունենք $[a, b]$ -ում արժեքներ ընդունող և բոլորին հավասարապես վերաբերվող պատահական մեծության հետ (որին ժամանակն է անուն տալ):

անգլերեն՝ *uniformly distributed*

Մահմանում 9.3 Կասենք, որ X պատահական մեծությունը **հավասարաչափ** է բաշխված (a, b) կամ $[a, b]$ միջակայքում՝

$$X \sim U(a, b)$$

եթե

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{եթե } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{մնացած կետերում} \end{cases}$$

9.6 Անկախություն

Ենթադրենք ներել ենք երկու զառ: Նախորդ թեմայում ասացինք, որ զառերի ելքերն իրար հետ կապ չունեն, հետևաբար դրանց հետ կապված ցանկացած երկու պարահույթ անկախ են՝ $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$: Մասնավորապես եթե X -ով նշենք առաջին զառի թիվը, իսկ Y -ով՝ երկրորդինը, ցանկացած a ու b թվերի համար կունենանք

$$\mathbb{P}[(X = a) \text{ և } (Y = b)] = \mathbb{P}[X = a] \cdot \mathbb{P}[Y = b]$$

Նույն կերպ, եթե X -ով նշանակենք առաջին զառի թվի քառակուսին, իսկ Y -ով ասենք՝ երկրորդի թվի մնացորդը 2-ի բաժանելիս, միևնույն է դրանց համար այս երկու $\{X = a\}$ և $\{Y = b\}$ պարահույթները լինելու էին անկախ և դրանց համար PDF-ը՝

$$\mathbb{P}[(X = a) \text{ և } (Y = b)]$$

գրելու էինք արտադրյալով: Տրամաբանական կլինի, եթե այս դեպքում նույնպես ասենք, որ X -ն ու Y -ը անկախ են:

Սահմանում 9.4 X և Y դիսկրետ պարահական մեծությունները կոչվում են **անկախ**, եթե ցանկացած $a, b \in \mathbb{R}$ թվերի համար

$$\mathbb{P}[(X = a) \text{ և } (Y = b)] = \mathbb{P}[X = a] \cdot \mathbb{P}[Y = b]$$

Իհարկե, անընդհատ պարահական մեծությունների համար բոլոր այս երեք հավանականություններն էլ զրո են, հետևաբար ընդհանուր դեպքում անկախությունը կսահմանենք CDF-ների միջոցով՝

Սահմանում 9.5 X և Y պարահական մեծությունները կոչվում են **անկախ**, եթե ցանկացած $a, b \in \mathbb{R}$ թվերի համար

$$\mathbb{P}[(X \leq a) \text{ և } (Y \leq b)] = \mathbb{P}[X \leq a] \cdot \mathbb{P}[Y \leq b]$$

Մասնավորապես, եթե ներենք երկու զառ կամ մեքադադրամ (կամ ցանկացած նման պարահական փորձ կրկնենք երկու անգամ), և սրացվածները նշանակենք X_1 -ով ու X_2 -ով, դրանք կլինեն անկախ և միարեսակ բաշխված պարահական մեծություններ:

և դիսկրետ, և անընդհատ դեպքում

առաջին փառերով i.i.d.

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Blitzstein-Hwang], 91-94 (պարահական մեծություն), 94-99 (PMF), 108-109 (CDF), 117-119 (անկախություն), 195-197 (PDF), 201-202 էջերը
- րեսնել պարահական մեծությունների փառեր օրինակներ
- դիպել PMF, CDF, PDF-ի մասին օգտակար փաստեր
- ըստ ցանկության՝ նաև մեկ այլ փաստեր 3b1b-ից

9.7 Խնդիրներ

Խնդիր 9.1 Երկու անգամ նետում ենք զառը և նշանակում

$$X = 1\text{-ին զառի թիվը}$$

$$Y = 2\text{-րդ զառի թիվը}$$

$$Z = \text{այդ երկուսից մեծագույնը} = \max\{X, Y\}$$

Կարող եք գրել Z -ի PDF-ն ու CDF-ը:

Խնդիր 9.2 Անին պատրաստեց մի արտասովոր զառ (1–6 թվերով), որի

- զույգ ընկնելու հավանականությունը նույնն է, ինչ կենտ ընկնելունը
- բոլոր զույգ թվերի հավանականությունները նույնն են
- 1 ընկնելու հավանականությունը 0.5 է

Ի՞նչ տեսք ունի զառի ընկած թվի PMF-ը:

Խնդիր 9.3 10 սմ երկարությամբ փայտը երկու պատահական կետերից կտրելով՝ բաժանում են 3 կտորի: Որքա՞ն է հավանական, որ այդ երեք կտորներով կարելի է կառուցել եռանկյուն:



Նուշում. Առաջին երկու կտորները նշանակենք X և Y -ով: Որքա՞ն կլինի երրորդ կտորը: Եռանկյան համար անհրաժեշտ է, որ կողմերից ցանկացած երկուսի գումարը մեծ լինի երրորդից:

լուծում

Խնդիր 9.4 $(0, 10)$ միջակայքից պատահականորեն վերցնում են երեք թիվ՝

$$X, Y, Z \sim U(0, 10)$$

իրարից անկախ և հավասարաչափ բաշխված:

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ սրացված երկարությամբ հասկանալի կարելի է կառուցել եռանկյուն:

Խնդիր 9.5 X պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է՝

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^5 & \text{երբ } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

որտեղ a հաստատունի արժեքն անհայտ է: Կարող եք գրել a -ն:

Խնդիր 9.6 Նամակարգիչը գեներացնում է պատահական թվեր, ընդ որում գեներացված X թվի խտության ֆունկցիան է՝

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{երբ } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Գևորգը որոշում է գեներացնել պատահական թիվ և 1-ից մեծ թվի դեպքում գնալ զբոսնելու, փոքր թվի դեպքում՝ քնելու, իսկ 1 թվի դեպքում՝ դաս անելու: Պարզեք, թե

1. ո՞րն է X -ի CDF-ը
2. որքա՞ն է հավանական, որ Գևորգը կգնա զբոսնելու
3. որքա՞ն է հավանական, որ Գևորգը դաս չի անի

Խնդիր 9.7 Վերունշյալ մարտավարության արդյունքում հավերժի քննությանը Պևորգի կատարաստանած հարցերի քանակը X պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է՝

հավանականությունների *տեսության*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{եթե } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{եթե } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{եթե } x > 1 \end{cases}$$

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ Պևորգը ճիշտ կատարաստանի հարցերի գոնե կեսին:

10.1 Մաթսպասում

Խաղում ենք հետևյալ խաղը: Ամեն անգամ ընտրում ենք 1-38 թվերից որևէ մեկը (ենթադրենք՝ 8), կտրարում ենք \$1-ի խաղադրույք, պտտում ռուլետկան և

- եթե ընկնում է 8, ապա շահում ենք \$36
- հակառակ դեպքում՝ կորցնում \$1-ը

10.1 Մաթսպասում	137
10.2 Վարիացիա	140
10.3 Կովարիացիա	144
10.4 Կոռելացիա	148
10.5 Բաշխումներ	149
10.6 Խնդիրներ	154



Նաթց. *Կիսադաշի՞ք արդյոք այսպիսի խաղ:*

Նավանաբար կպարասխանեք, որ ոչ, քանի որ հաղթելու հավանականությունը շատ փոքր է, իսկ շահելու ենթակա գումարը՝ ոչ այնքան մեծ:



Նաթց. *Իսկ եթե 8 ընկնելու դեպքում շահեիր \$150? Իսկ \$37.01-ի դեպքում:*

Քանի որ հաղթելու հավանականությունն ընդամենը $\frac{1}{38}$ է, ապա կոպիտ ասած՝ եթե 38 000 անգամ պտտենք, 1000 անգամը կընկնի մեր պահած թիվը, արդյունքում կշահենք

$$1000 \cdot 37.01$$

իսկ մնացած անգամները՝ կկորցնենք

$$37000 \cdot (-1)$$

Ուրեմն ընդհանուր առմամբ 38 000 անգամ խաղալով կունենանք մոտ

$$1000 \cdot 37.01 + 37000 \cdot (-1) = 10$$

դոլարի շահույթ, կամ միջինում ամեն մի խաղում՝

$$\frac{1000}{38000} \cdot 37.01 + \frac{37000}{38000} \cdot (-1) = \frac{10}{38000}$$

այսինքն՝ $\approx \$0.0003$ շահույթ:

Այս թիվը իհարկե մեծ չէ, բայց դրական է. եթե այս խաղը խաղանք մի քանի միլիարդ անգամ, կարող ենք միլիոնների շահույթ ակնկալել: Բնականաբար, հնարավոր է՝ բախտներս չբերի, մեր սպասածից քիչ փանենք, կամ էլ հակառակը՝ բախտի բերմամբ հաջողվի շատ գումար փանել, բայց միջինում կարող ենք *սպասել* ամեն խաղից մոտ $\approx \$0.0003$ -ի շահույթ:



անգլերեն՝ *expected value*

Սահմանում 10.1 X դիսկրետ արարահական մեծության մաթսպասում կանվանենք

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_k} x_k \cdot \mathbb{P}[X = x_k]$$

թիվը:

Այսինքն՝ հերթով կդիպարկենք X արարահական մեծության բոլոր հնարավոր x_k արժեքները և կվերցնենք դրանց կշռավորոված միջինը՝

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{X\text{-ի արժեքները}} \overbrace{x_k}^{\text{ամեն արժեք}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X = x_k]}_{\text{իր հավանականությամբ}}$$

Մասնավորապես եթե X -ի բոլոր արժեքներն ունեն նույն հավանականությունը, $\mathbb{E}[X]$ -ը կլինի այդ արժեքների միջին թվաբանականը, իսկ եթե օրինակ՝ արժեքներից մեկը 100 անգամ ավելի հավանական է, քան մյուսը, ապա $\mathbb{E}[X]$ -ը հաշվելիս այն կունենա 100 անգամ ավելի մեծ կշիռ:



Նաթ. Եթե ներսերը մեքսիկականն ու գիր ընկնելու դեպքում վերցնենք $X = 1$, դուշի դեպքում $X = 0$, որքա՞ն կլինի $\mathbb{E}[X]$ -ը:

Օրինակ 10.1 Ներսերում ենք զառն ու X -ով նշանակում ընկած թիվը: Այդ դեպքում X -ի մաթսպասումը կլինի՝

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1 + 2 + \dots + 6}{6} = \frac{7}{2}$$

այսինքն բոլոր արժեքների միջինը:

X^2 -ն ևս արարահական մեծություն է

Իսկ եթե ուզենք պարզել X^2 արարահայտության միջինը, պարզապես կվերցնենք X -ի արժեքների քառակուսիներն ու կրկին կբազմապարկենք այդ արժեքների հավանականություններով՝

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$



Զգուշացե՛ք. Ինչպես տեսնում ենք, $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$:

այս կանոնը անվանում են LOTUS

Նույնը նաև X^3 -ի, $\frac{1}{X}$ -ի, $\cos(X)$ -ի և առհասարակ ցանկացած $g(X)$ փոքրի արարահական մեծության համար՝

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_k} g(x_k) \cdot \mathbb{P}[X = x_k]$$

Եկեք հիմա սահմանենք մաթսպասման գաղափարը անընդհատ արարահական մեծության համար: Քանի որ անընդհատ X -ի դեպքում նրա ցանկացած արժեք ընդունելու հավանականությունը 0 է, $\mathbb{P}[X = x_k]$ -ն փոխարինենք իր անընդհատ անալոգով՝ $f_X(x)$ խտությամբ, իսկ քանի

որ միջակայքում ընկած բոլոր թվերը չենք կարող գումարել, Σ գումարի նշանը փոխարինենք ինտեգրալով՝

$$\mathbb{P}[X = x] \mapsto f_X(x)$$

$$\sum_{X\text{-ի արժեքները}} \mapsto \int_a^b$$

որպես (a, b) -ն այն միջակայքն է, որին պարկանում են X -ի բոլոր հնարավոր արժեքները: Ցանկության դեպքում կարող ենք իհարկե ինտեգրել ոչ թե միայն (a, b) միջակայքի, այլ ողջ առանցքի երկայնքով՝ $(-\infty, \infty)$, բայց քանի որ (a, b) -ից դուրս $f_X(x)$ -ը զրո է, ապա դա նույնը կլինի, ինչ ինտեգրել (a, b) -ով: Ուրեմն,

(a, b) -ն այն x -երն են, որպեսզի $f_X(x) \neq 0$

Սահմանում 10.2 X անընդհատ պարահական մեծության մաթսպասում կանվանենք

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

թիվը:

Կրկին այն միջակայքերը, որոնցում խտության ֆունկցիան ավելի մեծ է, կունենան ավելի շար կշիռ, քան ավելի ցածր խտությամբ միջակայքերը:

Օրինակ 10.2 Գագիկն ամեն օր «Բարեկամությունից» դասի գնալիս չափում է, թե նախադասվածից քանի բառ է ուշ կամ շուտ է շարժվում մեարդն: Չափումների շնորհիվ նա պարզել է, որ այդ բառերների տարբերությունը ցույց տվող պարահական մեծության PDF-ն է՝

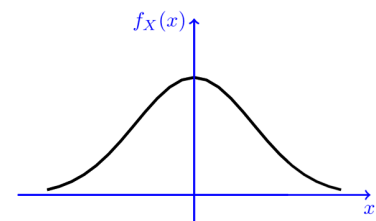
$$f_X(x) = e^{-x^2}$$

Սկզբում փորձեք f_X -ի գրաֆիկին նայելով կռահել, թե միջինում քանի՞ բառ է ուշանում մեարդն, ապա այն ճշգրիտ կհաշվենք:

Գրենք $\mathbb{E}[X]$ -ը հետևյալ տեսքով և ինտեգրենք՝

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (x^2)' dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Ուրեմն թեև որոշ օրերի մեարդն շուտ է շարժվում, որոշ օրերի՝ ուշ, միջինում այն շարժվում է... ճիշտ ժամանակին:



x -երի առանցքը բառերներն են

Նման ձևով կարող ենք նաև X -ը դնել ցանկացած g անընդհատ ֆունկցիայի մեջ և հաշվել $g(X)$ -ի մաթսպասումը՝

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$



Նաթք. X -ը ի՞նչ ֆունկցիայի մեջ պետք է դնենք Գագիկը, որպեսզի $\mathbb{E}[g(X)]$ -ը ցույց տառ միջինում մեարդի շեղումը ժամացուցակից:

Ենթադրենք հայրնի է, որ միջինում ամեն մեծահասակ մարդու համար ծախսվում է օրական 2500 դրամ, իսկ ամեն երեխայի համար՝ 4000 դրամ:



Նաթգ. Օրական միջինում որքա՞ն է ծախսում 1 մեծից և 1 երեխայից կազմված ընտանիքը: Իսկ 2 մեծից և 3 երեխայից:

Ինչպես պրամաբանորեն պետք է լինեն,

$$\mathbb{E}[c \cdot X] = c \cdot \mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$$

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

ավելի ընդհանուր՝

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots$$

և եթե մի պարահական մեծություն միշտ փոքր/հավասար է մյուսից՝ $X \leq Y$, ապա $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$:

Իսկ ի՞նչ կարելի է ասել պարահական մեծությունների *արտադրյալի* մաթսպասման մասին: Պարզվում է, որ

Թեորեմ 10.1 Եթե X -ն ու Y -ն անկախ են, ապա

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$



Զգուշացե՛ք. Նախառակը ոչ միշտ է ճիշդ. եթե $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, դա դեռ չի նշանակում, որ X -ն ու Y -ն անկախ են:

10.2 Վարիացիա

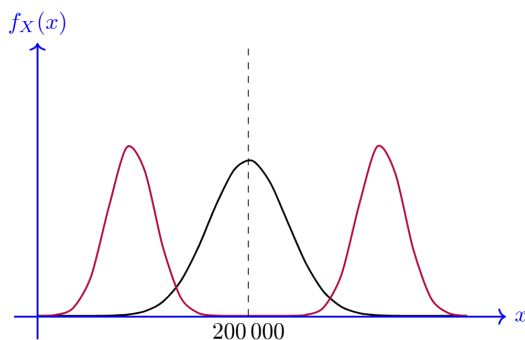
= պարահական վերցված աշխարակցի աշխարավարձի PDF-ը

Նկարում պարկերված են երկու փարբեր ընկերություններում աշխարավարձերի խտության գրաֆիկները: Ինչպես տեսնում ենք, երկուսում էլ միջին աշխարավարձը 200 000 դրամ է, սակայն

- հիմնարկներից մեկում աշխարավարձերը մոտ են իրենց միջինին
- մյուսում՝ միջինից բավական հեռու են, ցրված են

Ինչպեն չափենք միջինից ունեցած այս շեղումը՝ X -ի արժեքների և $\mathbb{E}[X]$ -ի հեռավորությունը: Սկզբի համար կարող ենք յուրաքանչյուր աշխարակցի X աշխարավարձից հանել այդ միջինը՝

$$X - \mathbb{E}[X]$$



Երկրաչափորեն սա կնշանակի f_X -ի գրաֆիկը $\mathbb{E}[X]$ -ով փանել ձախ, այսինքն այնպես, որ սրացվածի միջինը լինի 0:

Այն աշխատակիցների համար, որոնք սրանում էին միջինից բարձր աշխատավարձ՝ $X > \mathbb{E}[X]$, այս մեծությունը կլինի դրական, մյուսների համար՝ բացասական: Թեև մեզ հարկավոր է այդ շեղումների միջինը, բայց եթե վերցնենք սրացվածի մաթսպասումը՝

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]$$

շաք սրացողների դրական շեղումը կկրճարվի քիչ սրացողների բացասական շեղման հետ, և հնարավոր է՝ սրանանք 0, ինչպես **մեփրոյի** օրինակում: Ուրեմն դարձնենք այս փարբերությունը դրական:

Տարբերակներից մեկն է վերցնել սրացվածի մոդուլը, ապա հաշվել դրա միջինը՝

$$\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$$

մեկ ուրիշ փարբերակ է մոդուլի փոխարեն բարձրացնել քառակուսի՝

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$



Նարք. Ողն կրնարեիք Դուք: Ողն երբ պետք կգա:

Օրինակ 10.3 Ենթադրենք X -ը ինչ-որ պարահական մեծություն է, որն ընդունում է երեք արժեք՝ 0, 10 և 15, հերևյալ հավանականություններով՝

$$\mathbb{P}[X = 0] = 0.6, \quad \mathbb{P}[X = 10] = \mathbb{P}[X = 15] = 0.2$$

Անշուշտ, X -ի արժեքներն իրենց միջինից՝

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0.6 + 10 \cdot 0.2 + 15 \cdot 0.2 = 5$$

բավականին շեղված են: Շեղման չափը՝ $X - \mathbb{E}[X]$ -ը, 0.6 հավանականությամբ հավասար է -5 , 0.2-ով՝ 5, 0.2-ով՝ 15, հերևաբար

$$\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|] = 0.6 \cdot |-5| + 0.2 \cdot |5| + 0.2 \cdot |15| = 7$$

իսկ

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0.6 \cdot (-5)^2 + 0.2 \cdot 5^2 + 0.2 \cdot 15^2 = 65$$

Այժմ X -ի արժեքներից մեկը 1 միավորով մոտեցնենք միջինին, մյուսը՝ նույնքան հեռացնենք, և սրացվածը նշանակենք Y -ով.

$$\mathbb{P}[Y = 0] = 0.6, \quad \mathbb{P}[Y = 9] = \mathbb{P}[Y = 16] = 0.2$$

Այս գործողությունը անելիս մաթսպասումը չի փոխվի՝ $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] = 5$, իսկ արժեքների հեռավորությունները $\mathbb{E}[Y]$ -ից

- մոդուլով հաշվելու դեպքում կմնա նույնը.

$$\mathbb{E}[|Y - \mathbb{E}[Y]|] = 0.6 \cdot |-5| + 0.2 \cdot |4| + 0.2 \cdot |16| = 1$$

ինքնուրույն ստուգեք սա

- քառակուսիով հաշվելու դեպքում՝ կմեծանա.

$$\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] = 0.6 \cdot (-5)^2 + 0.2 \cdot 4^2 + 0.2 \cdot 16^2 = 69.4$$

Եթե արժեքները ևս 1-ով բրդենք համապատասխանաբար ձախ ու աջ՝

$$\mathbb{P}[Z = 0] = 0.6, \quad \mathbb{P}[Y = 8] = \mathbb{P}[Y = 17] = 0.2$$

մաթսպասումն ու մոդուլով հեռավորությունը նորից կմնան նույնը, իսկ քառակուսիովը՝ կրկին կմեծանա.

$$\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] = 0.6 \cdot (-5)^2 + 0.2 \cdot 3^2 + 0.2 \cdot 17^2 = 74.6$$

և այդպես շարունակ. չնայած մեր պատահական մեծության որոշ արժեքներ ավելի ու ավելի են հեռանում միջինից, մոդուլով հեռավորությունն այդ ցրվածությունը չի ֆիքսում, իսկ քառակուսով հեռավորությունը՝ գնալով ավելի մեծ թվեր է վերադարձնում:

Պատճառն, իհարկե, քառակուսին է. որքան մեծ է ինչ-որ արժեքի շեղումը, այնքան ավելի մեծ է նրա քառակուսին: Ավելի պարկերավոր օրինակ՝

Օրինակ 10.4 Ձեզ պետք է արյան ճնշումը 10 մմ ս.ս.-ով բարձրացնել: Դեղատարանն առաջարկում են երկու դեղ՝

- մեկը խմելիս ճնշումը կբարձրանա X -ով, ընդ որում

$$\mathbb{P}[X = 8.75] = 0.6, \quad \mathbb{P}[X = 10.5] = 0.3, \quad \mathbb{P}[X = 16] = 0.1$$

- մյուսի դեպքում՝ Y -ով, ընդ որում

$$\mathbb{P}[Y = 6.8] = 0.25, \quad \mathbb{P}[Y = 10] = 0.7, \quad \mathbb{P}[Y = 26] = 0.05$$

Ո՞ր դեղը կնախընտրեք խմել: Եթե վաճառողին հարցնեք, թե ո՞րն է ավելի վստահելի, նա կպատասխանի, որ երկու դեղերն էլ նույնն են՝ միջինում ազդեցությունը 10 է, մոդուլով միջին շեղման չափը՝ 1.6:

Մինչդեռ եթե հարցնեք դրանց միջին քառակուսային շեղումները՝

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 1.25^2 \cdot 0.6 + 0.5^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.1 \approx 4.6$$

$$\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] = 3.2^2 \cdot 0.25 + 0^2 \cdot 0.7 + 16^2 \cdot 0.05 \approx 15.4$$

կտեսնեք, որ երկրորդի շեղումն անհամեմատ ավելի մեծ է, այսինքն՝ երկրորդն ավելի *ռիսկային* է:

Իրոք, այն փաստը, որ 5% հավանականություն կա, որ արյան ճնշումը 10-ի փոխարեն 26-ով կբարձրանա, որևէ ձևով չի արտացոլվում մոդուլով շեղման մեջ, իսկ քառակուսիով հաշվելիս զգացվում է: Ներքևաբար երկրորդ փաթեթակով շեղման չափը հաշվելն ավելի պիտանի է ռիսկերը գնահատելու փեսանկյունից:

Մահմանում 10.3 X պատահական մեծության ցրվածք կամ վարիացիա կանվանենք

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

թիվը, իսկ դրա արմատը կանվանենք *ստանդարտ շեղում*:

ավելի ճշգրիտ՝ շեղման քառակուսիները

անգլերեն՝ *variance*

standard deviation

Ինչպես տեսանք վերևում և ինչպես երևում է բանաձևից, վարիացիան ցույց է տալիս, թե միջինում պատահական մեծության արժեքները որքանով են հեռու իրենց միջինից: Քանի որ այդ հեռավորությունը հաշվելիս շեղումները քառակուսի ենք բարձրանում, ապա նոր «միջինացնում», իմաստ ունի ստացված թվի արմատը դիտարկելը. այդպեղից էլ ստանդարտ շեղման օգտակարությունը:

ինչ-որ իմաստով $\text{Var}[X]$ -ը X -ի ու $\mathbb{E}[X]$ -ի L_2 հեռավորության քառակուսին է ($\approx X$ -ի նորմի քառակուսին)



Զգուշացե՛ք. Ինչպես $\mathbb{E}[X]$ -ը, այդպես էլ $\text{Var}[X]$ -ը թվեր են, ոչ թե պատահական մեծություններ:

Քանի որ այնքան էլ հարմար չէ այս բանաձևով $\text{Var}[X]$ -ը հաշվել, փորձենք այն պարզեցնել.

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

հաստատումները նշված են կապույտով

Ստացանք բավականին հարմար բանաձև՝ $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$:

Օրինակ 10.5 Կրկին X -ով նշանակենք զառը նետելիս ընկնող թիվը: Այդ թվի վարիացիան կլինի՝

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \approx 2.92$$

իսկ ստանդարտ շեղումը՝ ≈ 1.71 :

Մինչև առաջ անցնելը նկատենք վարիացիայի մի քանի հատկություններ: Նախ՝ հեռավորության քառակուսին չի կարող լինել բացասական, ուրեմն

$$\text{Var}[X] \geq 0$$

ընդ որում՝ զրոյի հավասար կարող է լինել միայն եթե X -ի բոլոր արժեքները նույնն են, այսինքն X -ն ընդունում է միայն մեկ արժեք:

Ի տարբերություն մաթսպասման՝ երբ պատահական մեծությունը բազմապատկում ենք որևէ թվով, նրա վարիացիան բազմապատկվում է այդ թվի քառակուսիով՝

$$\text{Var}[c \cdot X] = c^2 \cdot \text{Var}[X]$$

իսկ արժեքները հաստատունով մեծացնելիս կամ փոքրացնելիս դրանց ցրվածությունը, բնականաբար, չի փոխվում՝

$$\text{Var}[X + c] = \text{Var}[X]$$



Զգուշացե՛ք. Շատ դեպքերում $\text{Var}[X + Y] \neq \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$:



Նաթց. Ի՞նչ եք կարծում, ե՞րբ կլինի $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$:

Իրոք, սահմանման մեջ առկա քառակուսու պարճառով

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y])$$

ինչպես *նորմալայն* $\mathbf{a}$ ու $\mathbf{b}$ -ի դեպքում

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

այնպես էլ *անկախ* X ու Y -ի դեպքում՝

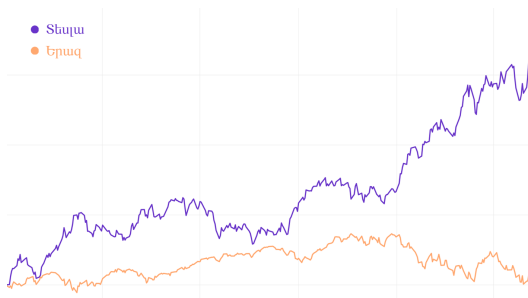
$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

այսինքն՝ գումարի վարիացիան կախված է ոչ միայն առանձին-առանձին գումարելիների վարիացիաներից, այլև դրանց՝ *իրար հետ ունեցած* կապից: Իսկ երբ X -ն ու Y -ն անկախ են, $\mathbb{E}[XY]$ -ը *հավասար է լինում* $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ -ի, և ունենում ենք $\text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$:

10.3 Կովարիացիա

այսինքն՝ պարահական վերցված օրը որքա՞ն են դրանց արժեքները

Ենթադրենք ունենք երկու պարահական մեծություններ, ասենք՝ «Տեւա» և «Երագ» ընկերությունների արժեթղթերը: Ինչպե՞ս պարզենք, թե որքա՞նով են դրանք իրարից կախված, կամ ավելի կոնկրետ՝ երբ դրանցից մեկը աճում/նվազում է, որքան է փոխվում մյուսը:



Նաթ. Ի՞նչ գործիք էինք օգտագործում երկու $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորների կապը/նմանությունը չափելու համար:

Նախ կարող ենք xy -հարթության վրա պարկերել X -ի և Y -ի միաժամանակ ունեցած արժեքների թվագույգերը, քվյալ դեպքում՝ ամեն օրվա համար նշել (x, y) կետը, որտեղ x -ն այդ օրը «Տեւայի» արժեթղթի գինն է, y -ը՝ «Երագի»:

Խելքին մոտ կլինի նաև, եթե X պարահական մեծության փոփոխության չափ ասելով հասկանանք նրա արժեքների՝ իր միջինի համեմատ ունեցած փարբերությունը՝ $X - \mathbb{E}[X]$, և ներմուծենք մի այսպիսի գործիք.

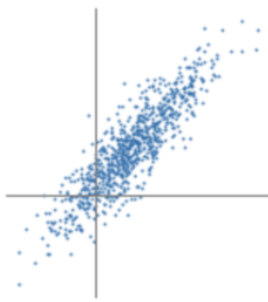
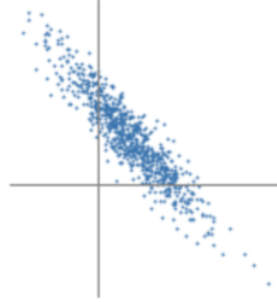
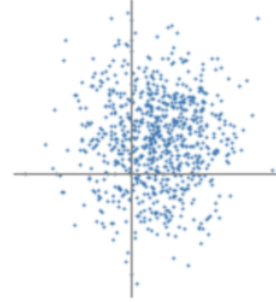
Սահմանում 10.4 X և Y պարահական մեծությունների *կովարիացիա* կանվանենք

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

թիվը:

գծային հանրահաշվի լեզվով ասած՝ կովարիացիան պարահական մեծությունների սկալյար արտադրյալն է

Փաստորեն կովարիացիան ցույց է տալիս, թե միջինում որքան է X -ի փոփոխության և Y -ի փոփոխության արտադրյալը: Եթե օրինակ՝ X -ը (իր միջինի համեմատ) 1 միավորով մեծանալիս Y -ը (իր միջինի համեմատ) միշտ մեծանա 5 միավորով, իսկ X -ը 1-ով փոքրանալիս է՝ փոքրանա 5-ով, ապա կունենանք $\text{Cov}[X, Y] = 5$:

 $\text{Cov}[X, Y] > 0$  $\text{Cov}[X, Y] < 0$  $\text{Cov}[X, Y]$ -ը մոդուլով փոքր է

Սա նշանակում է, որ $\text{Cov}[X, Y]$ -ը ցույց է փախ X -ի ու Y -ի միջև եղած *զծային կախումը*՝ թե միջինում մեկի զծային անը որքան փոփոխության է հանգեցնում մյուսի արժեքում (և հակառակը): Սրացված թիվը համաչափ է՝

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$$

Օրինակ 10.6 Ներքենք 3 մեքադադրամ, X -ով նշանակենք գիր ընկածների թիվը, Y -ով՝ դուշ ընկածներինը: Փորձենք հաշվել $\text{Cov}[X, Y]$ -ը:

Նախ, ի՞նչ հնարավոր արժեքներ կարող են ընդունել X -ն ու Y -ը միաժամանակ՝

- $X = 0, Y = 3$
- կամ $X = 1, Y = 2$
- կամ $X = 2, Y = 1$
- կամ էլ $X = 3, Y = 0$

Որքա՞ն է, ասենք, $X = 1$ և $Y = 2$ լինելու հավանականությունը.

$$\mathbb{P}[(X = 1) \text{ և } (Y = 2)] = ?$$

Կարող ենք այս պարահույթը բաժանել երեք ենթադեպքի՝

- առաջինը գիր, մյուս երկուսը դուշ՝ ԳԴԴ
- երկրորդը գիր, մյուս երկուսը դուշ՝ ԴԳԴ
- երրորդը գիր, մյուս երկուսը դուշ՝ ԴԴԳ

Մրանցից յուրաքանչյուրի հավանականությունը

$$\mathbb{P}[\text{ԳԴԴ}] = \mathbb{P}[\text{ԴԳԴ}] = \mathbb{P}[\text{ԴԴԳ}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

է, հետևաբար

$$\mathbb{P}[(X = 1) \text{ և } (Y = 2)] = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

և ճիշտ նույն ձևով $\mathbb{P}[(X = 2) \text{ և } (Y = 1)] = \frac{3}{8}$:

արդյո՞ք X -ն ու Y -ն անկախ են

վերևում գրվածի մեջ փոխենք «գիր» և «դուշ» բառերի տեղերը

Նման եղանակով հաշվելով մյուս երկու դեպքերի հավանականությունները՝ կունենանք այսպիսի պարկեր.

X	Y	հավանականություն
0	3	1/8
1	2	3/8
2	1	3/8
3	0	1/8

Այժմ հաշվենք X -ի ու Y -ի մաթսպասումները՝

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5 = \mathbb{E}[Y]$$

և հանենք դրանք յուրաքանչյուր փողում գրված արժեքներից.

$X - \mathbb{E}[X]$	$Y - \mathbb{E}[Y]$	հավանականություն
-1.5	1.5	1/8
-0.5	0.5	3/8
0.5	-0.5	3/8
1.5	-1.5	1/8

Կունենանք, որ

$$\mathbb{P}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) = -2.25] = \frac{2}{8}$$

$$\mathbb{P}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) = -0.25] = \frac{6}{8}$$

հետևաբար X -ի ու Y -ի կովարիացիան կլինի

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = -2.25 \cdot \frac{2}{8} + (-0.25) \cdot \frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

Սրացվեց բացասական կովարիացիա. իրոք, ըստ սահմանման՝ երբ X -ը աճում է, Y -ը պիտի նվազի:



Նարց. Իսկ որքա՞ն է $\text{Cov}[X, X + Y]$ -ը (ստանց հաշվելու):

Ինչպես կարող եք ենթադրել, եթե երկու պարահական մեծություններ իրարից անկախ են, նրանց կովարիացիան 0 է՝

$X - \mathbb{E}[X]$ -ն ու $Y - \mathbb{E}[Y]$ -ն անկախ են

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] \cdot \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] = (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]) \cdot (\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]) = 0 \end{aligned}$$

բայց հակառակը ոչ միշտ է ճիշդ: Թեկուզ միայն այն պարճառով, որ



Զգուշացե՛ք. Կովարիացիան ցույց է տալիս միայն պարահական մեծությունների միջև եղած **գծային** կապը:

Այսինքն՝ հնարավոր է, որ պարահական մեծությունները իրար հետ կապված լինեն (ոչ թե գծային, այլ ասենք՝ քառակուսային կապով), բայց կովարիացիան դա չկարողանա «տեսնել»:

Օրինակ 10.7 Ենթադրենք X պարահական մեծությունն ընդունում է երեք արժեք՝

$$\mathbb{P}[X = -1] = \mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{3}$$

իսկ Y -ը նրա քառակուսին է՝ $Y = X^2$: Բնականաբար X -ն ու Y -ն անկախ չեն, սակայն

$$\mathbb{E}[X] = 0, \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3}$$

և հնարավոր արժեքների հավանականություններն են.

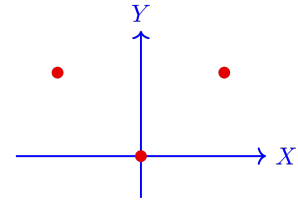
X	Y	հավանականություն
-1	1	1/3
0	0	1/3
1	-1	1/3

որպեսզի ստանում ենք՝

$$\text{Cov}[X, Y] = (-1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

Իրոք, թեև X -ն ու Y -ն անկախ չեն, բայց X -ի և՛ մեծանալիս, և՛ փոքրանալիս Y -ը փոխվում է նույն ձև՝ մեծանում է, այսինքն դրանց միջև եղած կապը գծային չէ՝ $\text{Cov}[X, Y] = 0$:

կարող եք ինքնուրույն շարունակել



Այնուամենայնիվ, կովարիացիան շատ օգտակար գործիք է երկու մեծությունների հնարավոր կապը բացահայտելու համար: Վերևում արված երկար ու ձանձրալի հաշվարկներից խուսափելու համար կովարիացիայի սահմանման մեջ բացենք փակագծերն ու պարզեցնենք. կստանանք՝

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

որպեսզի կունենանք մեզ հետաքրքրող մյուս հատկությունները՝

$$\text{Cov}[c \cdot X, Y] = \text{Cov}[X, c \cdot Y] = c \cdot \text{Cov}[X, Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y_1 + Y_2] = \text{Cov}[X, Y_1] + \text{Cov}[X, Y_2]$$

իսկ մասնավորապես դրանցից երկրորդի շնորհիվ՝ ոչ այնքան հետաքրքիր հաջորդ հատկությունը.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] &= \text{Cov}[X_1, Y_1] + \text{Cov}[X_1, Y_2] \\ &\quad + \text{Cov}[X_2, Y_1] + \text{Cov}[X_2, Y_2] \end{aligned}$$

որը կասկածելիորեն նման է բազմապարկելիս փակագծերը բացելուն՝ $(a + b)(c + d) = \dots$:



Նաթ. Ի՞նչ կստացվի, եթե Y -ի փոխարեն տեղադրենք X : Ինչպե՞ս կմեկնաբանենք ստացվածը:

Բնականաբար, եթե պարահական մեծություններից մեկը հաստատուն է՝ $Y = c$, ապա $\text{Cov}[X, Y] = 0$:

= ընդունում է միայն մեկ արժեք

10.4 Կոռելացիա

— Բայց մի բուսկ,— կարող եք հարցնել,— ի՞նչ է նշանակում $\text{Cov}[X, Y] = 60$. վերջը կա՞ր գծային կապ, թե՞ ոչ:

Իհարկե, եթե կովարիացիան դրական է, նշանակում է՝ որոշակի կապ կա, բայց ինչպե՞ս հասկանալ՝ այդ կապը մե՞ծ է, թե՞ փոքր, այսինքն՝ X -ն ու Y -ը մաքուր մեկը մյուսից գծային կապված մեծություններ են, թե՞ պարզապես շատ աղուր կերպով կապված ինչ-որ բաներ:



Զգուշացե՛ք. $\text{Cov}[X, Y]$ -ի՝ մոդուլով մեծ կամ փոքր լինելը ինքնին շատ բան չի նշանակում:

Եթե Y -ը մարդու հասակն է մետրով, $1000 \cdot Y$ -ը կլինի նույն հասակը մմ-ով

Չէ՞ որ եթե ասենք՝ Y -ը բազմապարկենք 1000-ով, դրանից X -ի ու Y -ի միջև եղած գծային կապը պետք է որ չփոխվի, բայց այ կովարիացիան միանգամից կմեծանա: Ուրեմն որպեսզի ունենանք պարահական մեծությունների գծային կապը ցույց տվող մի բացարձակ թիվ՝ բոլորի համար ընդհանուր մասշտաբով, պետք է $\text{Cov}[X, Y]$ -ը բաժանենք այնպիսի բանի վրա, որ ստացվածը լինի ինչ-որ ֆիքսված միջակայքում:



Նաթց. Ինչի՞ վրա էինք բաժանում $a \cdot b$ -ն, որպեսզի ստանայինք a -ի ու b -ի կազմած անկյունը/դրա կոսինուսը:

Կամ Փիրսոնի կոռելացիայի գործակից

Մահմանում 10.5 X և Y պարահական մեծությունների **կոռելացիա** կանխանենք հետևյալ թիվը՝

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]}}$$

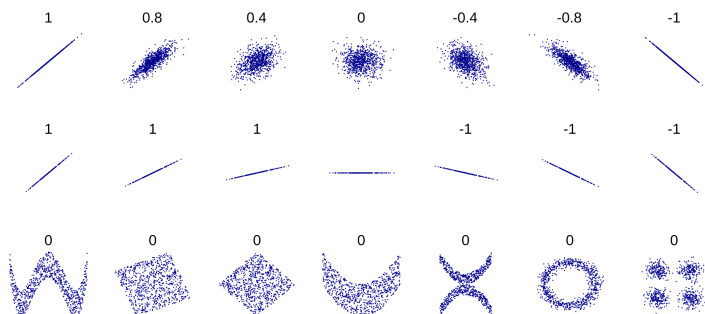
Այս թիվն արդեն կգտնվի $[-1, 1]$ միջակայքում և կլինի երկու մեծությունների գծային կապը ցույց տվող *ունիվերսալ* գործիք.

Թեորեմ 10.2

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

և հավասար է ± 1 -ի միմիայն այն դեպքում, երբ $Y = kX + b$:

Կրկին, կարդալուց լավ է աչքով տեսնել և բզբզալ:



Կոռելացիան X -ի ու Y -ի որոշ արժեքների դեպքում

10.5 Բաշխումներ

Եթե որոնք, թե ինչպես են բաշխված այս կամ այն երկրում մարդկանց աշխատավարձերը, հասակները, քաշերը և այլն, կնկարեք մի փարօրի–նակ նմանություն դրանց **խտության գրաֆիկներում**։ Կարծես բոլորը մո–տավորապես նույն գրաֆիկը լինեն՝ ինչ–որ չափով ձգված, սեղմված կամ տեղաշարժված։ Առանց պարզաբանների մեջ խորանալու նկարենք, որ այսպիսի նմանություններ հանդիպում են ամենափարթեք պրոցեսների արդյունքում առաջացող պարահական մեծությունների բաշխումներում։ Ուրեմն եթե ընդհանուր դեպքում այդ պարահական մեծություններից մեկի բաշխումը հեքագոտենք, ապա հեքագոտած կլինենք նաև նույն կադապարով/ֆորմայով սփացված մյուս բաշխումները։

Իրականում մենք մի անգամ նման բան արել ենք, երբ

- $[0, 10]$ հաղվածում ընտրում ենք պարահական կետ
- 12:00–13:00 պարահական պահի գալիս ենք կանգառ
- գեներացնում ենք պարահական թիվ $(-1, 1)$ միջակայքում
- ...

այս բոլոր պարահական մեծություններին փվեցինք մեկ ընդհանրական անուն՝ ասելով, որ դրանք *հավասարաչափ բաշխում* ունեն, և գրնելով $U(a, b)$ բաշխումով ցանկացած պարահական մեծության CDF–ն ու PDF–ը (որոնք ազապ կարող ենք օգրագործել նշված բոլոր մասնավոր օրինակների համար)։

Իհարկե համարելով, որ ցանկացած տե–ղամասում գրնելող արժեքներն ունեն նույն հավանականությունը

Եկեք այժմ նույն կերպ դիարարկենք մի քանի հիմնական բաշխումներ (անգիր անել պեք չէ), որոնք հանդիպում են փարթեք պրոցեսներում։ Սկսենք դիսկրետ բաշխումներից։

Բեռնուլիի բաշխում։ Դիարարկենք հեքնյալ իրավիճակները՝

- նեքում ենք մեքաղադրամ
- մրնում ենք վարորդական իրավունքի քննության
- կրակում ենք թիրախին
- ջնջում ենք լոքո

Դրանցից յուրաքանչյուրում կա երկու հնարավոր փարթեքակ՝ գիր կամ դուշ, անցնել կամ կրրվել, դիպել կամ ոչ, շահել կամ չշահել, և այլն։ Այսպիսի փորձերը կանվանենք *Բեռնուլիի փորձեր*, իսկ երկու հնարավոր արժեք ընդունող (մեկը՝ p , մյուսը՝ $1 - p$ հավանականությամբ) ցանկացած պարահական մեծության մասին կասենք, որ այն ունի Բեռնուլիի բաշխում՝

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Նեքությամբ կարող ենք հաշվել, որ այս դեպքում

$$\mathbb{E}[X] = p, \quad \text{Var}[X] = p(1 - p)$$

Երկրաչափական բաշխում։ Իսկ ի՞նչ, եթե որոշենք լոքոներ ջնջել այնքան, մինչև վերջապես շահենք (կամ ավելի խելացի միքը՝ քննություն փանք այնքան, մինչև վերջապես անցնենք)։ Քանի՞ անգամ կպահանջվի մինչև առաջին անգամ շահելը/անցնելը, կամ որ նույնն է՝ քանի՞ անգամ պեք է կրկնենք շահելու p հավանականություն ունեցող Բեռնուլիի փորձը, մինչև առաջին անգամ շահենք։

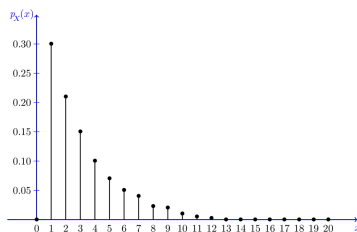
Նշանակենք այդ փորձերի քանակը X -ով և գրենք $p_X(k)$ -ն: Նախ՝ հավանականությունը, որ $X = 1$, այսինքն՝ որ հենց առաջին փորձից կստացվի անցնել քննությունը, p է:

Իսկ որ $X = 2$, այսինքն՝ առաջին անգամը կկորվենք, իսկ երկրորդին արդեն կանցնենք, հավասար է

$$\mathbb{P}[X = 2] = \underbrace{(1-p)}_{\text{1-ինը կկորվենք}} \cdot \underbrace{p}_{\text{2-րդը անցնենք}}$$

Հավանականությունը, որ $X = 3$

$$\mathbb{P}[X = 3] = \underbrace{(1-p)}_{\text{1-ինը կկորվենք}} \cdot \underbrace{(1-p)}_{\text{2-րդը կկորվենք}} \cdot \underbrace{p}_{\text{3-րդը անցնենք}}$$



X -ի PMF-ը, երբ $p = 0.3$

Եվ այդպես շարունակ՝

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots \cdot (1-p) \cdot p = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

այսինքն k -ն 1-ով մեծացնելիս հավանականությունը բազմապատկվում է $(1-p)$ -ով՝ դառնալով երկրաչափական պրոգրեսիա: Նման դեպքերում կասենք, որ X -ն ունի երկրաչափական բաշխում՝

$$X \sim G(p)$$

և կունենանք

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$



Նաթք. Կարող եք ապացուցել, որ եթե արդեն իսկ 100 անգամ ջնջել ու չեք շահել, դա Ձեզ ավելի մոտ չի դարձնում շահելուն:

Այլ կերպ ասած՝

$$\mathbb{P}[X > m + n \mid X > m] = \mathbb{P}[X > n]$$

Այս հատկության մասին ասում են, որ երկրաչափական բաշխումը *հիշողություն չունի*:

Բինոմական բաշխում. Մյուս կողմից՝ եթե իրար հետևից հանձնեք մի քանի քննություն, ասենք՝ n հատ, և ամեն մեկում ունենաք անցնելու նույն p հավանականությունը, կարող եք հարցնել՝ որքա՞ն է հավանական, որ կանցնեք բոլոր n քննությունները, կամ քննությունների կեսը, կամ 3 հատը, և այլն:

Եթե X -ով նշանակենք, թե այդ n Բեռնուլիի փորձերից քանիսն են հաջողությամբ պսակվել, կունենանք՝

$$\mathbb{P}[X = k] = \underbrace{C_n^k}_{\substack{n \text{ հատից } k \text{ հատ} \\ \text{ընտրելու ձևերը}}} \cdot \underbrace{p^k}_{\substack{k \text{ անգամ} \\ \text{կանցնենք}}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\substack{n-k \text{ անգամ} \\ \text{կկորվենք}}}$$

C_n^k -ն կարդացվում է «գուգորություն n -ից k -ական», նշանակվում է նաև $\binom{n}{k}$

որպեսզ $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$:

Այս բանաձևերը պետք չէ անգիր անել. դրանց շար գեղեցիկ բացատրությունն ու դուրս բերումը կարող եք գտնել **այսպես** կամ **այսպես**: Այս դեպքում կասենք, որ X -ն ունի բինոմական բաշխում՝

$$X \sim B(n, p)$$

և կունենանք՝

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad \text{Var}[X] = np(1-p)$$

Պուասոնի բաշխում. Եկեք ոչ թե իրար հետևից ինչ-որ փորձեր կրկնենք, այլ պարզապես հաշվենք, թե

- քանի հաճախորդ մտավ 13:00-14:00 հապավածում
- քանի ավտոմեքլար եղավ օրվա ընթացքում
- քանի զանգ եկավ սիսալ համարից
- քանի գոլ եղավ խաղի ժամանակ
- քանի ավտոբուս անցավ կանգառով 1 ժամում

այսինքն՝ հաշվենք, թե ամեն անգամը նախորդից անկախ տեղի ունեցող մի որևէ երևույթից քանի անգամ արձանագրվեց ֆիքսված ժամանակամիջոցում: Ստացված քանակը (ենթադրենք՝ խանութ մտած այցելուների) նշանակենք X -ով:

Եթե ասենք՝ նախորդ շաբաթվա փոխադրի հիման վրա իմանանք, թե միջինում 13:00-ից 14:00-ը քանի հոգի է մտնում խանութ (օրինակ՝ միջինում $\lambda = 20$ հոգի), ապա կունենանք՝

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

և կասենք, որ X -ն ունի Պուասոնի բաշխում՝

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$



Նաթգ. *Ճանաչում եք այս թվերը:*

Այս դեպքում մաթսպասումն ու վարիացիան համընկնում են՝

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \text{Var}[X] = \lambda$$

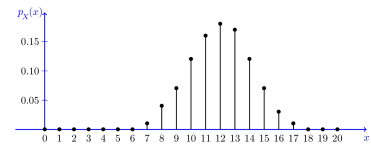
Եվ այդպես շարունակ: Կան **բազմաթիվ** այլ օգտակար բաշխումներ, որոնք հանդիպում են փարբեր իրավիճակներում, բայց դրանք անգիր հիշելու կամ բոլորը իմանալու կարիք չկա:

Անցնենք անընդհար բաշխումներին:

Նավասարաչափ բաշխում. Անձամբ ճանաչում ենք: Ավելացնենք միայն, որ եթե $X \sim U(a, b)$, ապա

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ցուցային (էքսպոնենցիալ) բաշխում. Մա մեր երկրաչափական բաշխման անընդհար անալոգն է: Պարկերացրեք՝ հենց նոր անցավ ավտոբուսը, և կանգնած սպասում եք, թե քանի րոպեից կգա

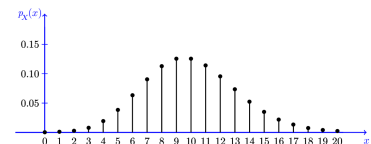


X -ի PMF-ը, երբ $n = 20$, $p = 0.6$

այսինքն՝ վայրկյանը մեկ նայում ենք՝ մարդ մտնել, թե՛ ոչ.

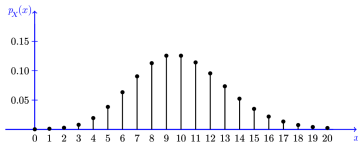
$$X \sim B\left(3600, \frac{\lambda}{3600}\right)$$

Իսկ սրա PMF-ը $\approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ է



X -ի PMF-ը, երբ $\lambda = 10$

կարող ենք համարել, որ աչքերը բացում ենք, նայում ավտոբուս կա, թե ոչ, փակում, **ապա նորից**, այնքան մինչև գա



X-ի PDF-ը տարբեր λ -ների դեպքում

հաջորդը: Այդ X ժամանակահատվածը, այսինքն՝ թե որքան է պետք սպասել, մինչև ինչ-որ երևույթ նորից տեղի ունենա, ունի ցուցային բաշխում՝

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

որտեղ λ -ով նշանակում ենք, թե միջինում որքան ժամանակը մեկ է գալիս ավտոբուսը:

X-ի խտության ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{եթե } x \geq 0 \\ 0 & \text{եթե } x < 0 \end{cases}$$

իսկ մաթսպաստումն ու վարիացիան կլինեն

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ինչպես երկրաչափական, այնպես էլ ցուցային բաշխումը հիշողություն չունի՝

$$\mathbb{P}[X > a + b \mid X > b] = \mathbb{P}[X > a]$$

այսինքն՝ եթե արդեն իսկ b թույլ սպասել ենք, բայց ավտոբուսը դեռ չի եկել, ապա հավանականությունը, որ այն կգա ևս a թույլ անց, նույնն է, ինչ եթե սկզբի b թույլն սպասած չլինեինք: Ավտոբուսը չգիտի՝ իրեն սպասել ենք, թե ոչ. մեր սպասելուց ոչինչ չի փոխվում:

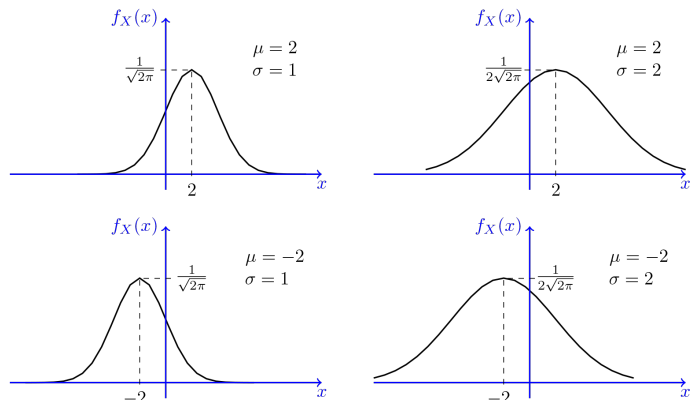
Նորմալ (գաուսյան) բաշխում. Ինչ-որ իմաստով՝ սա ամենակարևոր բաշխումն է: Պարկերացրեք՝ եթե

- ներքենք 100 հապ գառ
- չափենք պարահական 1000 հոգու հասակ
- հաշվենք 500 պարահական բառերի փառեր
- իրար վրա լցնենք **տարբերային շարժվող գնդիկներ**

այսինքն՝ նույն բաշխումը ունեցող մեծ թվով պարահական մեծությունների միջինը

ու նայենք, թե ինչ X թիվ ենք ստանում **միջինում**, ապա այդ X -ը կլինի պարահական մեծություն (ընդ որում՝ անընդհատ), և նրա խտության ֆունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



որպեսզի μ -ն ու σ^2 -ն նրա մաթսպասումն ու վարիացիան են՝

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \text{Var}[X] = \sigma^2$$



Նաթր. Ինչպես կիրառելի f_X -ի գրաֆիկը, եթե μ -ն մեծացնենք 7-ով, իսկ σ -ն բազմապատկենք 2-ով:

Թե ինչու է սա ճիշտ, և ինչու է արդյունքում սրացվում այսպիսի զանգակաձև կոր, բխում է «կենտրոնական սահմանային թեորեմ» կոչվող մի հեղաբոլոր փաստից, որը մենք կշրջանցենք և պարզապես կասենք, որ X -ն ունի նորմալ կամ գաուսյան բաշխում՝

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Մասնավորապես $X \sim N(0, 1)$ դեպքում կասենք, որ X -ն ունի *ստանդարտ* նորմալ բաշխում: Նորմալ բաշխում ունեցող ցանկացած X -ից կարող ենք իր μ միջինը հանելով ու $\frac{1}{\sigma}$ -ով բազմապատկելով՝ այն դարձնել ստանդարտ նորմալ:

Թեմայի շուրջ...

- կարդալ [Blitzstein-Hwang], 137-143, 156-159, 200, կամ [Grimmett-Welsh], 30-32, 73-74 էջերը (մաթսպասում, վարիացիա)
- տեսնել մաթսպասումն ու վարիացիան կոնկրետ օրինակով
- կարդալ [Blitzstein-Hwang], 300-304, կամ [Grimmett-Welsh], 113-117 էջերը (կովարիացիա, կոռելացիա)
- տեսնել, թե դիսկրետ և անընդհատ բաշխումներից որը երբ է հանդիպում
- ըստ ցանկության՝ կարդալ բաշխումների մասին [Blitzstein-Hwang], 100-103 (Բեռնուլի, բինոմական), 161-164 (Պուասոն), 201-202 (հավասարաչափ), 211-212 (նորմալ), 217-219 (ցուցային) էջերը
- ըստ ցանկության՝ դիտել կենտրոնական սահմանային թեորեմի մասին [տեսանյութ](#) 3b1b-ից

10.6 Խնդիրներ

Խնդիր 10.1 Ննարամիտ ուստա Վարդանն առաջարկում է խաղալ հետևյալ խաղը: Ներում եք զառը, և

- եթե ընկնում է 1, ուստա Վարդանը Ձեզ տալիս է 2 500 դրամ
- եթե ընկնում է 2, տալիս է 5000 դրամ
- եթե ընկնում է 3, ոչ ոք ոչինչ չի տալիս
- եթե ընկնում է 4 կամ 5, Դուք եք 10 000 դրամ տալիս ուստա Վարդանին
- եթե ընկնում է 6, տալիս եք 15 000 դրամ

Ցանկանում եք խաղալ այս խաղը: Ինչո՞ւ:

Խնդիր 10.2 Վահեն զառի Ξ կողմի վրա նկարեց ևս մի կետ՝ դարձնելով այն Ξ , իսկ $\square$ կողմի վրա ավելացրեց երկու կետ՝ դարձնելով այն $\square$:

Որքա՞ն է հավանականությունը, որ զառը նետելիս կընկնի 4-ից մեծ թիվ: Որքա՞ն են զառի մաթսպասումն ու վարիացիան:

Խնդիր 10.3 52 հատ խաղաթղթերից պատահականորեն քաշում եք մեկը: Եթե

- հանեցիք սիրտ, շահում եք 10 000 դրամ
- սիրտ չէ, բայց վրան մարդ է պարկերված, շահում եք 8 000 դրամ
- մնացած դեպքերում կորցնում եք 6 000 դրամ

Ձեռնարո՞ւ է խաղալ այս խաղը: Միջինում որքա՞ն կշահեք/կկորցնեք ամեն խաղի արդյունքում:

Խնդիր 10.4 X պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է՝

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{եթե } x \geq 1 \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Գտեք $E[X]$ -ն ու $\text{Var}[X]$ -ը:

Խնդիր 10.5 X պատահական մեծության խտության ֆունկցիան է՝

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{եթե } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Որքա՞ն են հետևյալ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրի մաթսպասումն ու վարիացիան.

- ա. X
- բ. $2X$
- գ. $2X + 7$
- դ. $(2X + 7) \cdot Y$

որտեղ Y -ը պատահական ներված զառի թիվն է:

Խնդիր 10.6 X -ն ու Y -ը հավասարաչափ բաշխված անկախ պատահական մեծություններ են, ընդ որում՝

$$X \sim U(0, 2), \quad Y \sim U(4, 10)$$

Կարող եք գրել

- ա. $X + Y$ -ի մաթսպատումը
- բ. XY -ի մաթսպատումը
- գ. $X + Y$ -ի խտության ֆունկցիան

Ի՞նչ բաշխում ունի $X + Y$ պարահական մեծությունը: Իսկ XY -ը: